前期末試験解答用紙　電子計算機(2004 年度 5E)

2004.09.09

学籍番号________　　氏名_________________________

1．二分法

[問題 1] (各 10 点)

閉区間$[a,b]$で連続な関数$f(x)$の値が

$$f(a)f(b)<0$$

の場合、$f(\alpha)=0$となるαが区間$[a,b]$にある。2 分法はこの性質を利用して近似解を求める。実際の数値計算のプログラムでは、区間$[a,b]$の中点cを計算し、$f(a)f(c)$と$f(c)f(b)$のうち負になるほうを新たな区間$[a,b]$とする。この操作を行う毎に、解が存在する区間の領域が半分になる。これを繰り返すことにより、任意の精度で方程式の近似解を求めることができる。これが、2 分法の計算原理である。

[問題 2] (各 5 点)

［ア］ `b-a > eps`

［イ］ `func(c)*func(a) < 0`

［ウ］ `a = c`

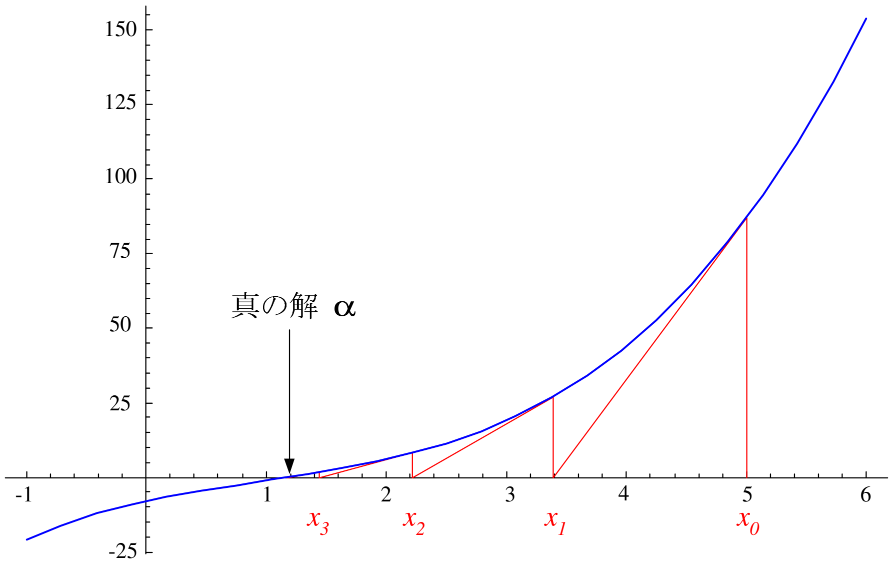
[問題 3] (5 点)

二分法は、1 回の繰り返し計算で、誤差は大体半分になる。したがって、N 回計算すると、誤差は、2^{-N}になる。

2．ニュートン法

[問題 1] (10 点)

図に示すように、関数 $f(x)$ のゼロ点 α に近い近似値 x_0 から出発する。そして、関数 $f(x)$ 上の点 $(x_0, f(x_0))$ での接線が、x 軸と交わる点を次の近似解 x_1 とする。そして、次の接線が x 軸と交わる点を次の近似解を x_2 とする。同様に $x_3, x_4, x_5, \ldots$ を計算する。この様子は、図のとおりである。この計算結果の数列 $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$ は、初期値 x_0 が適当であれば、真の解 α に収束する。このように接線と x 軸との交点の計算を繰り返すことで、方程式の近似階を求める方法をニュートン法と言う。



[問題 3] の複素数解を求める方法と同様に、テイラー展開を用いても、もちろん、正解である。グラフでの説明と同じことを言っている。

[問題 2] (10 点)

関数 $f(x)$ 上の点 $(x_i, f(x_i))$ での接線が x 軸と交わる点が、次の近似解 x_{i+1} となる。まず、この接線の方程式は、

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

となる。x 軸との交点の x 座標は、は $y=0$ の時の x の値である。したがって、 $y=0$， $x = x_{i+1}$ とすれば漸化式になる。これらを代入して、式を整理すると、

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

となり、ニュートン法の漸化式になる。

[問題 3] (10 点)

複素数まで拡張した非線型方程式 $w(z)=0$ の解を求める。このときの、i 番目の近似解を z_i とする。この近似解の周りでテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} w(z_i + \Delta z) &= w(z_i) + w'(z_i)\Delta z + \frac{1}{2} w''(z_i)\Delta z^2 + \cdots \\ &\approx w(z_i) + w'(z_i)\Delta z \end{aligned}$$

となる。 $w(z_i + \Delta z) = 0$ となるように、Δz を選ぶ。このとき、$z_i + \Delta z$ はより真の解に近づいている。先に式より、

$$\Delta z = -\frac{w(z_i)}{w'(z_i)}$$

となる。したがって、次の近似解は

$$z_{i+1} = z_i - \frac{w(z_i)}{w'(z_i)}$$

である。これが複素数まで拡張したニュートン法の漸化式である。

[問題 4] (5 点)

i 番目の近似解 x_{i+1} と真値αの差の絶対値、ようするに誤差を考える。誤差は、ニュートン法の漸化式を利用すると、

$$
\begin{aligned}
\left|\alpha - x_{i+1}\right| &= \left|\alpha - x_i + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right| \\
&= \left|\alpha - x_i + \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \left(1 - \frac{f(\alpha)}{f''(\alpha)}\right)\left(x_i - \alpha\right) + O\left((\alpha - x_i)^2\right)\right| \\
&= O\left(\left|\alpha - x_i\right|^2\right)
\end{aligned}
$$

となる。$i+1$ 番目の近似値は、i 番目に比べて 2 乗で精度が良くなっているの二次収束である。

[問題 5] (各 5 点)

［ア］ `x[i+1]=x[i]-func(x[i])/dfunc(x[i]);`

［イ］ `fabs((x[i+1]-x[i])/x[i])<=eps;`

［ウ］ `3*x*x-6*x+9;`

3．二分法とニュートン法の比較

[問題 1] (10 点)

ニュートン法と二分法を比較すると、それぞれの長所と短所は、次のようになる。

ニュートン法
- ［長所］ 初期値が適当ならば、解への収束が二分法に比べて非常に早い。二次収束である。
- ［短所］ 二分法は必ず解へ収束するが、ニュートン法は初期値が悪いと収束しない場合がある。

二分法
- ［長所］ ニュートン法は初期値が悪いと収束しない場合があるが、二分法は必ず解へ収束する。
- ［短所］ ニュートン法に比べ、解への収束が遅い。一次収束である。

[問題 2] (各 5 点)

［二分法のグラフ］ C

［ニュートン法グラフ］ E