

矩形導波管中の電磁波の減衰

山本昌志*

1 概要

矩形導波管でのマイクロ波の減衰をポインティングベクトルを使って計算してみた。導波管中のマイクロ波の減衰については、Rebort E. Collin の「Foundations for microwave engineering」(邦訳「マイクロ波工学」)に書かれているが、表面インピーダンスなる量を用いて計算している。なんとなく、この表面インピーダンスは直感的に分かりにくかったので、全てポインティングベクトルを用いて計算をした。当然、全く同じ結果が得られが、やはりうれしい。

ここで、示す結果自体は、新しいものは何もない。ただ、マイクロ波の学習には適当な教材と思われるので、忘れないうちに、計算過程を公開しておく。

ポインティングベクトルのみを用いて、導波管でのマイクロ波の計算をした人は過去にいたと思われるが、私は知らないので、引用、あるいは参考文献で示すことができないので容赦願いたい。過去の文献を教えてもらえれば、このページに載せようと思っている。

2 導波管の減衰計算

2.1 矩形導波管の電磁場

図 1 に示す矩形導波管の TE_{10} モードの電磁場は、よく知られているように

$$H_z = H_0 \cos(k_c x) e^{-ik_z z} \quad (1)$$

$$H_x = i \frac{k_z}{k_c} H_0 \sin(k_c x) e^{-ik_z z} \quad (2)$$

$$E_y = -i \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{k_0}{k_c} H_0 \sin(k_c x) e^{-ik_z z} \quad (3)$$

とかける。ここで、 k_0 は自由空間の波数、 k_c はカットオフ周波数の波数、 k_z は z 方向の波数である。それぞれは、以下の通りである。

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c} \\ k_c &= \frac{\pi}{a} \\ k_0^2 &= k_c^2 + k_z^2 \end{aligned} \quad (4)$$

* 国立秋田工業高等専門学校 電気情報工学科

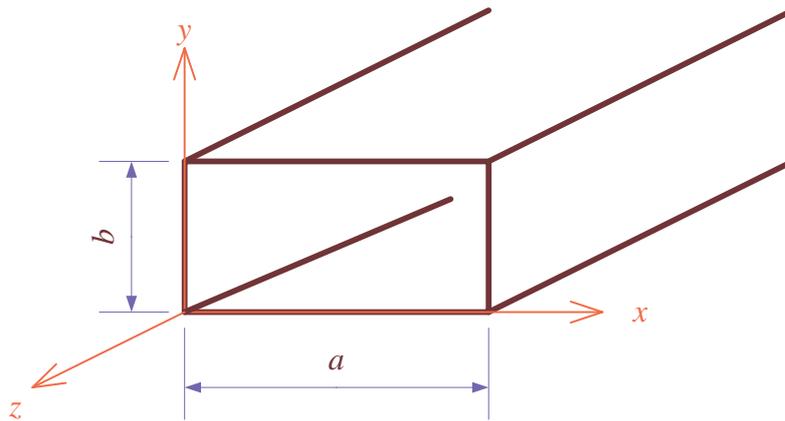


図 1: 矩形導波管の座標系

2.2 金属中の電場

マイクロ波が金属に当たると、その表面のごく薄い部分に電流が流れる。この電流が流れることにより、発熱が生じ、マイクロ波電力のロスになる。この電流量から、発熱を計算することもできるが、ここではポインティングベクトルを用いて、マイクロ波のロスを計算する。

摂動計算により表面近くの電場を計算して、ポインティングベクトルの計算を行うことにする。金属の抵抗は非常に小さく、マイクロ波は完全反射すると仮定しても、ほとんどの場合問題ない。完全反射だとロスが生じないので、完全反射の磁場から有限の小さい抵抗があった場合の、金属表面の電場を求める。

金属中の電磁場の振る舞いを示す方程式は、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (7)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (8)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (9)$$

である。式 (5) の両辺に $\nabla \times$ をかけて、整理すると

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (10)$$

が得られる。これは、近似の全く無い正しい式である。これを、図 2 の座標系の元で解くことにする。

完全導体の境界条件の場合、磁場は金属の接線方向のみで、電流はその垂直方向に流れている。この場合、電流の厚さは無限小で、無限大の電流密度となる。しかし、抵抗が無いので、電流が流れていても、それによる電場は無い。一方、有限な抵抗を有する金属では図のように電流分布が厚さ方向に広がっており、電流の方向に電場もある。

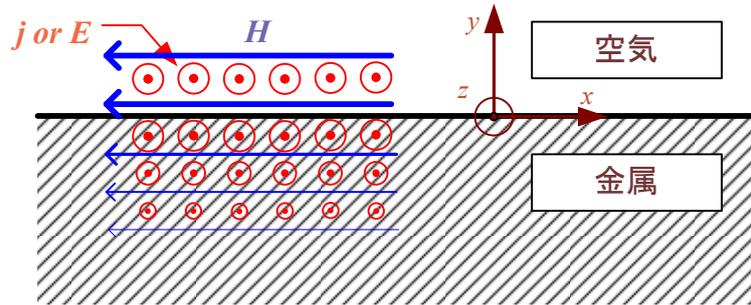


図 2: 金属表面の電磁場

表面に垂直の電場は許されるが、それには興味がないのでここでは図に書いていない。なぜならば、表面に垂直な電場と図にかかっている磁場が作るポインティングベクトルは、金属に沿って流れるため、マイクロ波のロスにならないからである。

興味の対象は、金属の中に向かっていくポインティングベクトルである。ロスを計算する上で重要なものは、図に示している空気と金属の境界での x 方向の磁場とそれに垂直な z 方向の電場である。完全導体であれば z 方向の電場は存在しないが、有限な抵抗を持つ金属では、磁場を作る電流により電場が発生する。その電場は、 $j = \sigma E$ という関係を満たす。

この電場は、高周波の電場、式 (3) と異なることに注意が必要である。高周波の電場は、 y 方向を向いており、ポインティングベクトルは z 方向を向くため、導波管での電磁波の減衰にはならないのは以前に述べたとおりである。ここで問題としているのは、磁場を作るための電流が流れるとできる電場である。いわゆるオーム損失である。

図 2 の様な座標系の元、式 (10) を計算して、磁場を作る電流による電場を計算するのである。式 (10) はベクトルの方程式であるが、図に示すように座標系と決めれば、 E_z のみのスカラーの方程式になる。この式を解くことになるが、そのままでは、計算が大変である。そこで、左辺のフーリエ成分のみ考え、電場は E_z しかないことを忘れないで、計算すると

$$\text{左辺} = -\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} \quad (11)$$

$$= (k_x^2 + k_y^2) E_z \quad (12)$$

と変形できる。 k_x と k_y は、それぞれの方向の波数である。 k_x は自由空間の波長の逆数程度で、 k_y は後で示す表皮深さの逆数程度の大きさである。従って、 k_y は k_x に比べて非常に大きく、式 (??) のうち、 k_y^2 の項のみが重要になる。従って、

$$k_y^2 E_z = i\omega\sigma\mu E_z + \omega^2\varepsilon\mu E_z \quad (13)$$

となる。これから、 k_y を計算すればよいので、

$$k_y^2 = i\omega\sigma\mu + \omega^2\varepsilon\mu \quad (14)$$

となる。このまま計算しても良いが、結果の式が複雑になるので、もう少し近似を行う。この式の右辺の 2 項

を比べる。その大きさの比は、 σ と $\omega\varepsilon$ の比となることが分かる。それぞれを比べると、表1のようになる¹。この表から、右辺の第2項は無視しても良い近似であることがわかる。この項を無視すると、

$$k_y = \pm \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}(1+i) \quad (15)$$

となる。図2から、 $-y$ 方向に進むと電場は弱くならなくてはならないので、負符号が解となる。さらに、電場が $1/e$ になる深さ、

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} \quad (16)$$

は、表皮深さ (skin depth) と呼ばれる量である。したがって、波数ベクトルの y 成分は、

$$k_y = -\frac{1+i}{\delta} \quad (17)$$

と書き表せる。

表 1: 伝導電流と変位電流の比較。銅の導電率は $\sigma = 5.88 \times 10^7 [1/\Omega m]$ と SUS304 の導電率は $\sigma = 1.39 \times 10^6$ とした。

	σ	$\omega\varepsilon$
銅	5.88×10^7	2.26×10^4
SUS304	1.39×10^6	2.26×10^4

これまでの k_y の計算結果から、金属中深さ方向の電場の強度分布がわかる。即ち、

$$E_z = E_0 e^{y/\delta} e^{-i(y/\delta + \omega t)} \quad (18)$$

である。電場が表皮深さで $1/e$ になっていることが分かる。

金属表面 ($y=0$) での電場は E_0 で、磁場は H_0 とすると、その関係を導く必要がある。そのために、式 (6) を使うことにする。ただ、表1に示すように、変位電流の項は無視できるので、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (19)$$

となる。 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ として、式 (18) をこの式に代入して計算すると、

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = E_0 e^{y/\delta} e^{-i(y/\delta + \omega t)} \quad (20)$$

となる。この微分方程式を解くことになるが、定数項は興味がない。定数項、即ち直流成分はマイクロ波のエネルギーロスには全く寄与しない。したがって、磁場は、

$$H_x = \frac{\delta}{(i-1)} \sigma E_0 e^{y/\delta} e^{-i(y/\delta + \omega t)} \quad (21)$$

¹この比較は、伝導電流と変位電流の比較になっていることに注意すること。

となる。これから、金属表面での磁場 H_0 と電場 E_0 の関係は

$$H_0 = \frac{\delta}{(i-1)} \sigma E_0 e^{y/\delta} \quad (22)$$

と分かる。この関係式を用いて、金属中の電場と磁場の強度は以下のように書き表せる。

$$\begin{aligned} H_x &= H_0 e^{y/\delta} e^{-i(y/\delta + \omega t)} \\ E_y &= \frac{H_0(i-1)}{\sigma\delta} e^{y/\delta} e^{-i(y/\delta + \omega t)} \end{aligned} \quad (23)$$

これから、金属表面でのポインティングベクトルを計算すれば、磁場 H_0 の時のロスが分かる。1周期にわたって積分して、その平均のポインティングベクトルの大きさは、

$$\begin{aligned} \langle P' \rangle &= \frac{1}{2} \Re(E_z H_x^*) \\ &= -\frac{H_0 H_0^*}{2\sigma\delta} \end{aligned} \quad (24)$$

となる。これが、磁場 H_0 があった場合の単位面積あたり、金属中にエネルギーが逃げている量を示している。マイナス符号がついているのは、エネルギーは -y 方向に逃げていくからである。

2.3 導波管のエネルギーの流れと損失

今までの結果を利用して、導波管のエネルギーの流れと損失を計算する。導波管の平均のエネルギーの流れ $\langle P_{tr} \rangle$ は、

$$\begin{aligned} \langle P_{tr} \rangle &= \frac{1}{2} \Re \int_0^a \int_0^b \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \hat{z} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \Re \int_0^a \int_0^b (E_x H_y^* - E_y H_x^*) dx dy \\ &\quad \text{TE}_{10} \text{ モードでは} \\ &= -\frac{1}{2} \Re \int_0^a \int_0^b E_y H_x^* dx dy \\ &\quad \text{式 (1) ~ (4) を使うと} \\ &= \frac{ab k_0 k_z}{4 k_c^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_0^2 \end{aligned} \quad (25)$$

となる。これで、 H_0 をパラメーターとして、導波管を通過するマイクロ波の電力が分かった。

次に必要な計算は、導波管のトータルのロスである。式 (24) を導波管の壁に沿って積分する。すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{d\langle P_{tr} \rangle}{dz} &= \oint \langle P' \rangle dl \\
 &= \frac{1}{2\sigma\delta} \oint HH^* dl \\
 &= \frac{1}{2\sigma\delta} \oint H_x H_x^* + H_z H_z^* dl \\
 &\quad \text{式 (1) と (2) を代入すると} \\
 &= \frac{1}{2\sigma\delta} \left[2 \int_0^a \left(\frac{k_z}{k_c} \right)^2 H_0^2 \sin^2(k_x x) + H_0^2 \cos^2(k_x x) dx + 2 \int_0^b H_0^2 dy \right] \\
 &= \frac{H_0^2}{\sigma\delta} \left[\left(\frac{k_z}{k_c} \right)^2 \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b \right] \tag{26}
 \end{aligned}$$

となる。

これから単位長さあたりの減衰量 α [dB/m] を計算する。この α の定義は次のようになる。

$$\langle P_{tr} \rangle = P_0 10^{-\frac{\alpha}{10} z} \tag{27}$$

これから、減衰量は

$$\begin{aligned}
 \alpha &= -\frac{1}{\langle P_{tr} \rangle} \frac{d\langle P_{tr} \rangle}{dz} \times \frac{10}{\log 10} \\
 &\quad \text{式 (25) と (26) を代入すると} \\
 &= \frac{1}{\sigma\delta} \frac{4}{ab} \frac{k_c^2}{k_0 k_z} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[\left(\frac{k_z}{k_c} \right)^2 \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b \right] \times \frac{10}{\log 10} \\
 &= \frac{1}{\sigma\delta ab k_0 k_z} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (k_0^2 a + 2k_c^2 b) \times \frac{20}{\log 10} \tag{28}
 \end{aligned}$$

と計算できる。