座標系と微分演算子

山本昌志*

2005 年 1 月 9 日

1 はじめに

電磁気学が取り扱う問題を考えるとき、ベクトル解析を使うことが多い。そこで現れる量の多くが、ベクトルであることを考えると当然である。ベクトルで表現すると、物理的な内容を簡素に表現でき、まことに便利である。その一方、なれないとその数学的な取り扱いに気をとられ、物理的な内容を見失いかねない。その中でも、座標系を変えた場合のベクトルの取り扱いに苦労している学生が多い。そこで、ここでは、座標系の取り扱いの基本を示す。

2 ベクトルと座標系

本当は、ベクトルというものをきっちりと定義してから、ベクトル量と座標変換の話をしなくてはならいが、それは他の機会に譲るとする。気になる人は、適当な教科書でも読むこと。たとえば、ジョージ・アルフケンの教科書 [1] がわかりやすくて良い。

ベクトル量は座標系に依存しない。これは、ある場所の電場を考えると、その位置を直交座標 (x, y, z) で表そうが、極座標 (r, θ, φ) で表そうが、電場 $\boldsymbol{E}$ は同じであることを言っている。次の通りである。

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = \boldsymbol{E}(r, \theta, \varphi) \tag{1}$$

しかし、この電場を成分で表すと事情は異なることは、すぐに気がつくであろう。それぞれの成分 (E_x, E_y, E_z) と (E_r, E_θ, E_z) が異なるである。

$$\begin{aligned} E_x &\neq E_r \\ E_y &\neq E_\theta \\ E_z &\neq E_\varphi \end{aligned} \tag{2}$$

これは、ベクトルの成分というものは、座標軸に依存するからである。先ほど示した教科書 [1] では、

> ベクトルは、座標系の取り方によらない幾何学上の物体として取り扱われることに注意しよう。実際これまでの所では、どんな座標系も用いていない。座標系の取り方に依存しないという、· · ·

*国立秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

と上手に表現している。

　このことをもう少しわかりやすく 2 次元座標系で示す。図 1 のように、ベクトル $\boldsymbol{E}$ は座標系に全く依存しない量である。位置が決まれば、その量は決まる。そして、その成分は直交座標と極座標では、異なる。もちょっと、感のいい人は、それぞれの座標系の成分の関係は、座標系の回転と同じであることがわかるであろう。ベクトル量の成分の変換は、回転の座標変換と全く同じである。このことは、ベクトルの定義として、しばしば使われる。ここでは、これ以上、深入りはしないこととするが、座標系によるベクトルの成分の変換は、座標回転の変換と同じであることを以降の議論に用いる。ただし、これは直交座標系の間の変換に限る。斜交座標系については、ここでは取り扱わない。

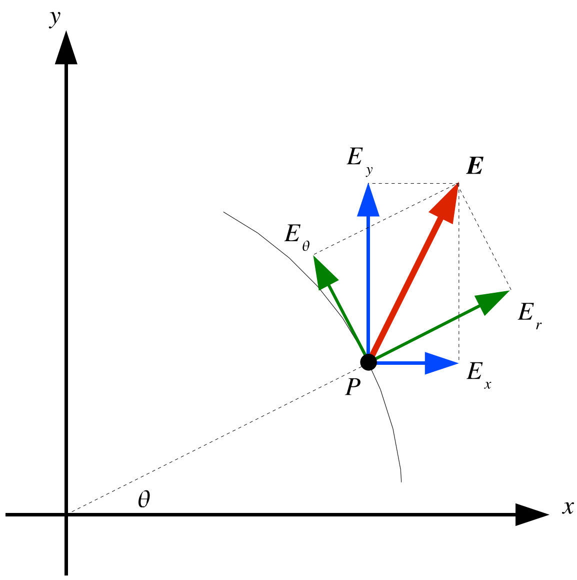

図 1: 2 次元のカーテシアン座標と極座標系での電場

3　座標系の変換

　ベクトル場の微分を考えるとき、位置ベクトルが重要な役割を果たす。この位置ベクトルの取り扱いについて、ここでは述べる。特に、スケール因子が座標系の変換の中心的な役割を果たすことに注意しよう。それは、座標系を変えて積分をするときのヤコビ行列と同じような働きをする。

　以降の議論では、カーテシアン座標系と曲線座標系の関係について述べる。ここで取り扱う曲線座標系は直交座標系に限る。曲線座標系と言っても、おなじみの円筒座標系や極座標系のことである。これ以外にもいろいろな、直交曲線座標系はある。

　カーテシアン座標系は特別な座標系ではなく、直交曲線座標系のひとつと考えられるが、特別に良い性質がある。それは、線素や面積素、体積素がすぐにわかることである。そのため、カーテシアン座標系と曲線座標系を比較して、必要な諸量を計算する。

3.1　位置ベクトル

3 次元空間の任意の点の位置はカーテシアン座標系で (x, y, z) と表すことができる。この 3 つの数値で表された量はベクトル量で、位置ベクトルといわれる。同じ位置ベクトルを、曲線座標系では、(u_1, u_2, u_3) と表すことにする。当然、カーテシアン座標系の成分 x, y, z は、

$$\begin{aligned} x &= x\left(u_1, u_2, u_3\right) \\ y &= y\left(u_1, u_2, u_3\right) \\ z &= z\left(u_1, u_2, u_3\right) \end{aligned} \tag{3}$$

と u_1, u_2, u_3 を独立変数とした関数で表すことができる。逆もまた然りである。

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1\left(x, y, z\right) \\ u_2 &= u_2\left(x, y, z\right) \\ u_3 &= u_3\left(x, y, z\right) \end{aligned} \tag{4}$$

これら (3)(4) 式は、特別なことを言っているのではなく、ある直交座標系の位置ベクトルの成分 (u_1, u_2, u_3) が決まれば、カーテシアン座標系のそれ (x, y, z) が一意に決まると言っているにすぎない。また逆も、同様に成り立つ。今までの経験でよく知っていることである。たとえば、ある任意の点は、極座標の (r, θ, ϕ) で表現しても、カーテシアン座標で表現しても、一意に表すことができる。

要するに 3 次元座標系の位置ベクトルは、3 個の数値で表すことができるのである。その 3 個の数値と取り方は、座標系に依存する。そして、それらには 1 対 1 の関係がある。

先に述べたように、ここでは直交曲線座標を取り扱う。したがって、ここで述べている曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) のお互いの軸は、直交することになる。さらに、ここでは通常使われる右手系のみを取り扱うことにする。

3.2　単位ベクトル

今後の議論として、もう一つ準備が必要である。単位ベクトルを定義する。普通、カーテシアン座標系では、それらは $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ と表現される。そうすると、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{5}$$

となる。カーテシアン座標系の場合、位置を表す (x, y, z) が位置ベクトルの成分になる。一方、曲線座標系で使う単位ベクトルを $\hat{\boldsymbol{u}}_1, \hat{\boldsymbol{u}}_2, \hat{\boldsymbol{u}}_3$ とすると

$$\boldsymbol{r} \neq u_1\hat{\boldsymbol{u}}_1 + u_2\hat{\boldsymbol{u}}_2 + u_3\hat{\boldsymbol{u}}_3 \tag{6}$$

となる。曲線座標系での位置は、(u_1, u_2, u_3) で表せるが、それはそこで使う単位ベクトルの成分とならないのである。これが曲線座標系を使う場合の面倒くさい部分であるが、しょうがない。これ以降、この面倒な部分の取り扱いを延々と示すことになる。

まずは、基底となる単位ベクトルを定義しておく必要がある。カーテシアン座標系と極座標系 (曲線座標系) の単位ベクトルを図 2 と 3 に示す。これをみながら、以下の説明を理解してほしい。まずわかりやすい、カーテシアン座標系からである。単位ベクトル $\boldsymbol{i}$ は、位置ベクトルの x 成分を固定し、y,z をパラメーター

とした yz 平面に垂直で、x が増加する方向に向いている。従って、単位ベクトル $\boldsymbol{i}$ は x 軸に平行で、x が増加する方向に向いている。その大きさは 1 である。他の単位ベクトル、$\boldsymbol{j}$ や $\boldsymbol{k}$ も同じように説明できる。xy、yz、zx 平面の法線はそれぞれ直交しているので、単位ベクトル $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ もそれぞれ直交している。曲線座標でも事情は同じである。ベクトル $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ は、u_1 成分を固定し、u_2,u_3 をパラメーターとした u_2u_3 曲面に垂直で、u_1 が増加する方向に向いている。さらに、それぞれの曲面、u_1u_2、u_2u_3、u_3u_1 曲面はそれぞれ直交[1]しているので、単位ベクトル同士も直交している。これらの単位ベクトルが直交していることと、大きさが 1 であることは、

$$\hat{\boldsymbol{u}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_j = \delta_{ij} \tag{7}$$

と表すことができる。ここで、δ_{ij} はクロネッカー記号[2]である。で表せる。

カーテシアン座標系と曲面座標系の単位ベクトルはよく似ているが、大きな違いがある。それは、カーテシアン座標系ではどの位置でも単位ベクトルは同じであるが、曲面座標では座標により単位ベクトルは異なる。このことが曲面座標を使うことの数学的な取り扱いを難しくしている。ただ、この取り扱いが少し難しくなる不利益よりも、多大な利益を得ることができることがあるため、曲線座標が使われることが多い。

最後にひとつ注意を与えておく。これまではカーテシアン座標 (x, y, z) と他の直交座標系 (u_1, u_2, u_3) を分けて話した。しかし、カーテシアン座標系も直交座標系の一つであるため、x, y, z を u_1, u_2, u_3 に置き換えても良い。置き換えかたも任意に決めて良いのである。

ただし、ここでは右手系と取り扱うことにしたので、

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{u}}_1 &= \hat{\boldsymbol{u}}_2 \times \hat{\boldsymbol{u}}_3 \\
\hat{\boldsymbol{u}}_2 &= \hat{\boldsymbol{u}}_3 \times \hat{\boldsymbol{u}}_1 \\
\hat{\boldsymbol{u}}_3 &= \hat{\boldsymbol{u}}_1 \times \hat{\boldsymbol{u}}_2
\end{aligned} \tag{8}$$

の関係を満たすように曲線座標系は決めなくてはならない。

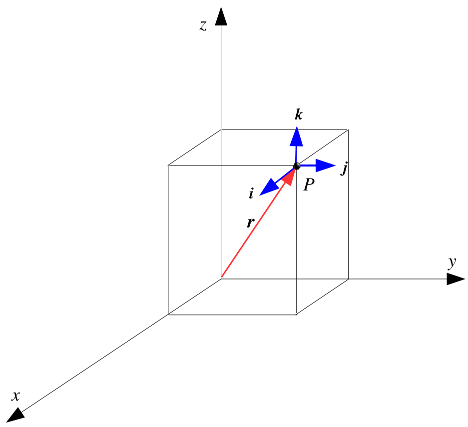

図 2: カーテシアン座標系

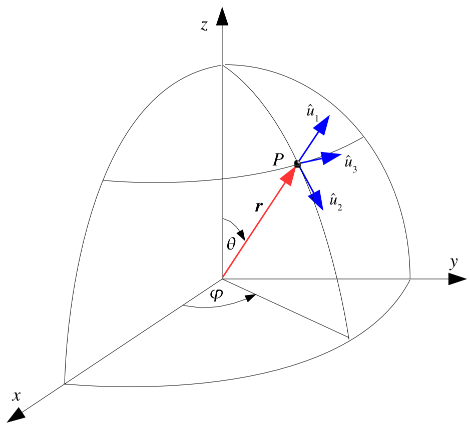

図 3: 極座標系

[1]斜向座標系はここでは取り扱わない。
[2]$i = j$ のとき 1、$i \neq j$ のとき 0 の値をとる。

3.3 接ベクトル

ここでは、接ベクトルを導入して、曲線座標の変化と位置ベクトルの変化の関係を求める。要するに、座標が (du_1, du_2, du_3) 変化した場合の位置ベクトルの変化 $d\boldsymbol{r}$ を知りたいのである。カーテシアン座標系の場合は、これは簡単で、

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}dx + \boldsymbol{j}dy + \boldsymbol{k}dz \tag{9}$$

である。しかし、曲線座標系の場合、このように簡単にならず、

$$d\boldsymbol{r} \neq \hat{\boldsymbol{u}}_1 du_1 + \hat{\boldsymbol{u}}_2 du_2 + \hat{\boldsymbol{u}}_3 du_3 \tag{10}$$

である。座標の変化が位置ベクトルの成分の変化とならないのである。これらのことは、式 (5) や (6) から直ちに分かる。

曲線座標系の位置ベクトルの変化を考える。そのために、よく分かっているカーテシアン座標系の式 (3) から始め、曲線座標系に移る。この式の位置ベクトルの全微分は、

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= (dx, dy, dz) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial x}{\partial u_3}du_3,\ \frac{\partial y}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial y}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial y}{\partial u_3}du_3,\ \frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial z}{\partial u_3}du_3 \right) \end{aligned} \tag{11}$$

となる。この式は、曲線座標系を (du_1, du_2, du_3) と変化させた場合、カーテシアン座標系での位置ベクトルの変化を表している。

ここで、曲線座標の変化を $(du_1, 0, 0)$ とした場合を考える。このとき、位置ベクトルの変位 $d\boldsymbol{r}$ は、u_2u_3 に曲面の法線方向に向いているのは明らかであろう。従って、u_1 曲線に接していることになる。この変位はベクトルで、単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ と平行になるのも明らかであろう。曲線座標の変化を $(du_1, 0, 0)$ とした場合の変位ベクトル $d\boldsymbol{r}_1$ は、式 (11) を用いて計算すると

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r}_1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u_1}du_1,\ \frac{\partial y}{\partial u_1}du_1,\ \frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 \right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u_1},\ \frac{\partial y}{\partial u_1},\ \frac{\partial z}{\partial u_1} \right) du_1 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u_1}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u_1}\boldsymbol{k} \right) du_1 \end{aligned} \tag{12}$$

となる。これは、座標が du_1 変化した場合の位置ベクトルの変位を表している。同じことが、du_2 や du_3 についても言える。

式 (12) の右辺の括弧内のベクトルは、接ベクトルと呼ばれている。接ベクトルは、それぞれの変位に対して決められ、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_1 &= \frac{\partial x}{\partial u_1}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u_1}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u_1}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{U}_2 &= \frac{\partial x}{\partial u_2}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u_2}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{U}_3 &= \frac{\partial x}{\partial u_3}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u_3}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u_3}\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{13}$$

となる。一般的に書けば、

$$\boldsymbol{U}_i = \frac{\partial x}{\partial u_i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u_i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u_i}\boldsymbol{k} \tag{14}$$

である。これから、曲線座標が (du_1, du_2, du_3) 変わると位置ベクトルの変位は、

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{U}_1 du_1 + \boldsymbol{U}_2 du_2 + \boldsymbol{U}_3 du_3 \tag{15}$$

である。これで、この節の目的である曲線座標の変化と位置ベクトルの変化の関係を求めることができた。

3.4 スケール因子

曲線座標の変化と位置ベクトルの変化の関係は、前節の式 (15) で示した。この場合、接ベクトルと言うやっかいなものがある。ここでは、スケール因子を用いて、それらの関係をもう少し分かりやすく表現する。

前節に述べたように、接ベクトルと単位ベクトルの方向は一致している。そのため、

$$\boldsymbol{U}_i = h_i \hat{\boldsymbol{u}}_i \tag{16}$$

とする事ができる。接ベクトルと単位ベクトルをつなぐ定数 h_i をスケール因子と言う。このスケール因子は、h_1, h_2, h_3 と 3 個の数で表すことができるが、ベクトルではない。スケール因子を使うと、位置ベクトルの変位は、

$$d\boldsymbol{r}_i = h_i \hat{\boldsymbol{u}}_i du_i \tag{17}$$

と表すことができる。座標が (du_1, du_2, du_3) 変位したときの位置ベクトルの微少変位は、

$$d\boldsymbol{r} = h_1 \hat{\boldsymbol{u}}_1 du_1 + h_2 \hat{\boldsymbol{u}}_2 du_2 + h_3 \hat{\boldsymbol{u}}_3 du_3 \tag{18}$$

となる。これは、スケール因子を用いることにより、座標の変化から、直接位置ベクトルの変化を示す式が得られることを示している。従って、曲線座標の位置ベクトルの変位を計算するためにはスケール因子の計算が重要となる。

ここで定義したスケール因子の中には、接ベクトルが隠れているので、前節の内容と矛盾しないばかりか、同じである。それにも関わらず、接ベクトルではなくスケール因子を使のは、

- 変位ベクトルを表す式の内容がわかりやすくなる。スケール因子と言うように座標のスケールの変換を使っているように考え方を変えるメリットは計り知れない。

からである。このスケール因子は座標の変化に対してのスケールである。基準はカーテシアン座標である。また、絶対位置のスケールでないことに注意しておく。座標を表す 3 個の量の一つを du_i と変化させると、座標ベクトルは $h_i \hat{\boldsymbol{u}}_i du_i$ と変わるのである。これは、カーテシアン座標系で、dx 変化させると、位置ベクトルが $\boldsymbol{i}dx$ 変化するのと同じである。後で述べるが、カーテシアン座標系のスケール因子は 1 である。

残った問題は、スケール因子を求める具体的な方法である。それを導くために、式 (16) の両辺を 2 乗し、式 (14) を代入すると

$$\begin{aligned} h_i^2 &= U_i^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2 \end{aligned} \tag{19}$$

が得られる。これが、スケール因子を求める公式である。曲線座標系のスケール因子を求めるためにはカーテシアン座標系と比較することになる。なにしろ、カーテシアン座標系のスケールは直感で分かるように非常に簡単なのであるため、それと比較することになる。

式 (16) の示すところをみると、スケール因子の 2 乗の計算は簡単である。すると、スケール因子そのものは、その 1/2 乗を計算すれば良いのであるが、符号の問題が残る。これは、スケール因子を決めている式 (16) を考えればよい。一般には、単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{u}}_i$ の方向は、du_i を増加させた方向とする。従って、h_i は正の値となる。

この結果をみてわかるように、$h_i du_i$ は変位ベクトルの大きさを示し、長さの次元になる。u_i は長さの次元である必要はなく、角度等を用いて座標を表すことができるが、スケール因子を乗じると長さの次元になるのである。u_i は一般化座標[3]とでも言うもので、スケール因子を乗じることにより長さの次元のおなじみの座標になる。スケール因子と言う名前はその働きを、よく表している。

もっとよくスケール因子のイメージが湧くのは、座標を d_i のみ変化させた場合である。その場合の座標の変化 (距離) を ds_i とすると

$$ds_i = h_i du_i \tag{20}$$

となる。これは、実にわかりやすい。実際の長さの変化は、座標を表すパラメーターの変化にスケール因子をかければよいのである。まずこのイメージをつかむことが重要である。

表 1 に、実際の問題でよく使われる 3 つの座標系について、スケール因子を示す。これを求める手順は簡単で、次のようにする。

1. 問題に適した直交曲線座標系を決めて、カーテシアン座標系との関係をもとめる。
2. 式 (19) に従い、スケール因子を計算する。

表 1: 電磁気学でよく使われる座標系。一般座標、カーテシアン座標系との関係、スケール因子を示している。

	座標系		
	カーテシアン	円柱	極
座標系イラスト	図 4	図 5	図 6
(u_1, u_2, u_3)	(x, y, z)	(r, θ, z)	(r, θ, φ)
x	x	$r\cos\theta$	$r\sin\theta\cos\varphi$
y	y	$r\sin\theta$	$r\sin\theta\sin\varphi$
z	z	z	$r\cos\theta$
h_1	1	1	1
h_2	1	r	r
h_3	1	1	$r\sin\theta$

ここで示した曲線座標系とはことなるものについても、同じような方法でスケール因子を求めることができるので、必要に応じて計算すればよい。

[3]解析力学の一般化座標と似ているので、ここではそう呼んだ。実際にはこのように呼ばない。

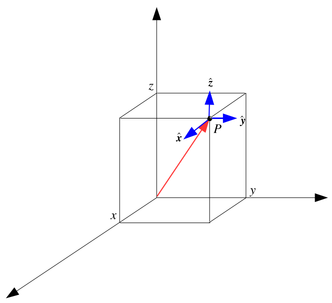

図 4: カーテシアン座標系

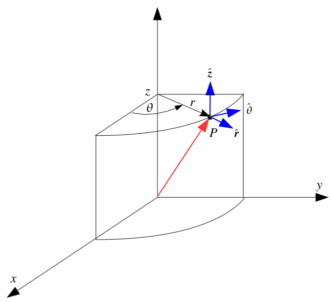

図 5: 円柱座標系

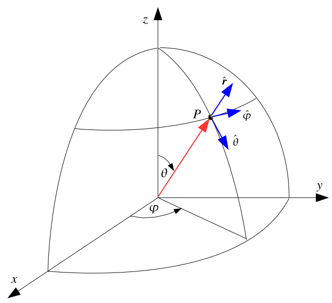

図 6: 極座標系

4 線素、面積素、体積素

4.1 線素

座標系を変えた場合の空間での距離を考える。空間の非常に近い 2 点 P, Q を考える。それぞれの点を、カーテシアン座標系では $P(x, y, z)$ と $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$ とする。すると、2 点間の距離 ds は

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{21}$$

となる。中学校以来おなじみの 3 平方の定理である。

それでは、これを一般化して、他の直交座標系でも成り立つのであろうか?。これは、成り立つはずもなく、$ds \neq du_1^2 + du_2^2 + du_3^2$ である。そこで、他の座標系の場合、距離 ds がどうなるか、もう少しまじめに考えよう。ds の 2 乗は、変位ベクトル $d\boldsymbol{r}$ 自身の内積に等しい。変位ベクトルは式 (17) を使えば簡単に求められる。これらをまとめると

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= (h_1 \hat{\boldsymbol{u}}_1 du_1 + h_2 \hat{\boldsymbol{u}}_2 du_2 + h_3 \hat{\boldsymbol{u}}_3 du_3) \cdot (h_1 \hat{\boldsymbol{u}}_1 du_1 + h_2 \hat{\boldsymbol{u}}_2 du_2 + h_3 \hat{\boldsymbol{u}}_3 du_3) \\ &= (h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2 \end{aligned} \tag{22}$$

となる。この ds を線素という。

これは、これで正確であるが、こんな計算をするまでもなくスケール因子の役割をわかりやすく記述する式 (20) を使う方が良い。この方がストレートで憶えやすい。

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 \\ &= (h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2 \end{aligned} \tag{23}$$

直交曲面座標を使っているので簡単である。

4.2　面積素

カーテシアン座標系の面積素は、$dxdy$ のように表される。dx は、y と z を固定して、x を微少変位させた長さである。同様に、dy は、x と y を固定して、y を微小変化させたものである。この場合、dx と dy はお互いに直交しているので、それが作る長方形の面積は、$dxdy$ となる。これが面積素で、これを足しあわせる (積分) と、その面の面積になる。ここでは、曲線座標でどのようになるか計算する。これは、後の微分演算子を求めることに使われる。

座標を du_i 微少変位させた軌跡と、du_j 微少変位させた軌跡で作られる平行四辺形[4]の面積 dS_{ij} とする。その面積は、ベクトル積の絶対値として計算できるので

$$\begin{aligned}
dS_{ij} &= |d\boldsymbol{r}_i \times d\boldsymbol{r}_j| \\
&= |h_i \hat{\boldsymbol{u}}_i du_i \times h_j \hat{\boldsymbol{u}}_j du_j| \\
&= h_i h_j du_i du_j
\end{aligned} \tag{24}$$

となる。これが曲線座標の面積素である。

なにも、ベクトル積を計算しないまでも、$d\boldsymbol{r}_i$ と $d\boldsymbol{r}_j$ は直交することと、それぞれの大きさは $h_i du_i$ と $h_j du_j$ から、その面積は $h_i h_j du_i du_j$ と直接計算できる。ここでもスケール因子が便利であることがわかる。さらに、直交座標系を使うことの恩恵を被ることができる。

4.3　体積素

体積素も面積素と考え方はおなじである。従って、体積素 dV は

$$\begin{aligned}
dV &= (d\boldsymbol{r}_1 \times d\boldsymbol{r}_2) \cdot d\boldsymbol{r}_3 \\
&= (h_1 \hat{\boldsymbol{u}}_1 du_1 \times h_2 \hat{\boldsymbol{u}}_2 du_2) \cdot h_3 \hat{\boldsymbol{u}}_3 du_3 \\
&= [(\hat{\boldsymbol{u}}_1 \times \hat{\boldsymbol{u}}_2) \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_3]\, h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \\
&\qquad \text{式 (8) から} \\
&= h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3
\end{aligned} \tag{25}$$

となる。これも、こんな計算をするまでもなく、直交座標系であることと、スケール因子が理解できていれば、直感的に求めることができる。

体積素はこれで終わりであるが、ヤコビ行列 J との関係を少し述べておく。座標変換を行った場合の体積素は、

$$\begin{aligned}
dxdydz &= \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \end{matrix} \right\| du_1 du_2 du_3 \\
&= |J|\, du_1 du_2 du_3
\end{aligned} \tag{26}$$

[4]直交しているので、長方形である。

の関係がある。これと式 (25) から、$|J| = h_1h_2h_3$ と推測ができる。しかし、式 (26) の行ベクトルが直交しているという条件を使い、行列式を計算するのは大変やっかいである。そこで、行列式の見方を変えることにする。行列式の値は、その行ベクトルが作る平行 6 面体の体積に等しいはずである。この場合、行ベクトルは直交しているので直方体になる。その体積は簡単で、それぞれのベクトルの大きさを乗算すればよい。従って、

$$
\begin{aligned}
|J| = &\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2} \\
&\quad \times \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2} \\
&\qquad \times \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2}
\end{aligned} \tag{27}
$$

となるのは、明らかであろう。この式の右辺は、$h_1h_2h_3$ である。ヤコビ行列を使っても同じ結果が得られるのである。

5 スカラー場・ベクトル場の微分

ここでは、曲線座標系での微分演算子について、説明する。なんと言ってもよく使われる微分演算子は、勾配と発散、回転である。カーテシアン座標系では、これらの表現は簡単であるが、曲線座標系ではどうなるだろうか?。いろいろな方法で曲線座標系のこれらの微分演算子を導出することができるが、これまでに求めたスケール因子を使うと非常に簡単でわかりやすい。

5.1 勾配

スカラー場 f の勾配 ∇f は、

$$
df = \nabla f \cdot d\boldsymbol{r} \tag{28}
$$

と定義できる。座標を $d\boldsymbol{r}$ 変化させると、スカラー場の値は df 変わるのである。スカラー場の変化は、勾配に座標の変化量の内積である。スカラー場の変化量はスカラー量、座標の変化はベクトル量であるため、勾配はベクトル量である。勾配の方向は、式 (28) から分かるように、スカラー場の正の変化量が最大の方向である。内積は、各々のベクトルの大きさと、それらのなす角の余弦を乗じた値になるからである。

ここで、曲線座標系の微少変位ベクトル $d\boldsymbol{r}$ は、式 (18) に示されている。これが、式 (28) が右辺の $d\boldsymbol{r}$ の項になる。次に、勾配 $\nabla\varphi$ はベクトル量なので、係数 F_1, F_2, F_3 を使って、

$$
\nabla f = F_1\hat{\boldsymbol{u}}_1 + F_2\hat{\boldsymbol{u}}_2 + F_3\hat{\boldsymbol{u}}_3 \tag{29}
$$

と表すことができる。この式の F_1, F_2, F_3 を求めることができれば、曲線座標系の勾配が分かる。そのために、これと式 (18) を式 (28) に代入すると

$$
\begin{aligned}
df &= (F_1\hat{\boldsymbol{u}}_1 + F_2\hat{\boldsymbol{u}}_2 + F_3\hat{\boldsymbol{u}}_3) \cdot (h_1\hat{\boldsymbol{u}}_1 du_1 + h_2\hat{\boldsymbol{u}}_2 du_2 + h_3\hat{\boldsymbol{u}}_3 du_3) \\
&= h_1F_1 + h_2F_2 + h_3F_3
\end{aligned} \tag{30}
$$

となる。

一方、スカラー場 f は位置の関数であるため、独立変数 (u_1, u_2, u_3) を使って、

$$f = f(u_1, u_2, u_3) \tag{31}$$

と書くことができる。この関数の全微分は、

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3}du_3 \tag{32}$$

である。この結果と式 (30) を比べると、

$$\begin{cases} h_1F_1 = \dfrac{\partial f}{\partial u_1}du_1 \\ h_2F_2 = \dfrac{\partial f}{\partial u_2}du_2 \\ h_3F_3 = \dfrac{\partial f}{\partial u_3}du_3 \end{cases} \tag{33}$$

となる。これから F_1, F_2, F_3 を求め、式 (29 に代入すると、曲線座標系の勾配が

$$\nabla f = \frac{\partial f}{h_1\partial u_1}\hat{\boldsymbol{u}}_1 + \frac{\partial f}{h_2\partial u_2}\hat{\boldsymbol{u}}_2 + \frac{\partial f}{h_3\partial u_3}\hat{\boldsymbol{u}}_3 \tag{34}$$

と求められる。これで、この節の目的である、曲線座標系の勾配を求める式を得ることができた。

この式の解釈は簡単で、u_2 と u_3 を固定して Δu_1 変化させた場合の f の変化は、

$$(\Delta f)_1 = \frac{\Delta f}{h_1\Delta u_1}h_1\Delta u_1 \tag{35}$$

となる。ここで、$\Delta\varphi/h_1\Delta u_1$[5]の極限の操作をおこなうと、これは $\partial\varphi/h_1\partial u_1$ となる。u_2, u_3 を固定しているので偏微分になるのである。この偏微分が du_1 のみを変化させたときのスカラー場 φ の変化率、即ち、勾配の $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ 方向成分である。ちょうど、式 (34) の右辺の第 1 項である。du_2 や du_3 も同様である。ここでも、スケール因子が重要な役割を果たしている。

おまけとして、7.1 節に、非常に危なっかしい方法でこの勾配の求め方を示す。

5.2 発散

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(u_1, u_2, u_3)$ の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ は、ある体積要素から流れ出るフラックス[6]の総量をその体積で割ることにより求められる。これは、スカラー量になる。例えば、図 7 のようにベクトル場に閉じた領域を考え、その表面から流れ出るフラックスの総量を体積で割るのである。体積要素をどんどん小さくすると、形状に依存しないである値に近づく。そして、この体積要素をゼロにした極限が発散と定義できる。これを式で表すと、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \lim_{V\to 0}\frac{\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS}{\int_V dV} \tag{36}$$

[5]変位ベクトルの $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ 方向の成分は、h_1du_1 である。$\Delta(h_1u_1)$ とならないことに注意。

[6]面の法線方向からでるベクトル場の総量。フラックス =(面積) ×(面の法線方向のベクトル) である。

となる。ここで、分母は体積となり、分子は表面積とその法線方向のベクトル場の積分となる。これは、分母分子の極限を計算しているので、ベクトル場の微分となっている。

それでは、曲線座標系の微少体積要素を用いて、その微分の内容を求めてみよう。微少体積要素は局面からなる 6 面体で、図 8 のようになっている。この微少体積要素のベクトル場の変化やスケール因子の変化をよく考えて、発散を求める。式 (36) を全て計算するのは紙面の都合上厳しいので、まずは $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ 方向のフラックスを計算する。図でも分かるように、ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ 方向成分[7] A_1 は、一方の面では入り込み、他方では出ている。さらに、この 2 面で、ベクトル A_1 の値とスケール因子の値が異なることに注意が必要である。u_1 の面でのそれぞれの値を A_1, h_2, h_3 とすると、$u_1 + du_1$ でのそれらは、

$$A_1(u_1+du_1) = A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial u_1}du_1 \tag{37}$$

$$h_2(u_1+du_1) = h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial u_1}du_1 \tag{38}$$

$$h_3(u_1+du_1) = h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial u_1}du_1 \tag{39}$$

となる。フラックスは面積とベクトルの成分の積なので、この 2 面の寄与は

$$\begin{aligned}
flux_1 &= \left(A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial u_1}du_1\right)\left(h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial u_1}du_1\right)du_2\left(h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial u_1}du_1\right)du_3 - A_1h_2du_2h_3du_3 \\
&= \left(\frac{\partial A_1}{\partial u_1}h_2h_3 + A_1\frac{\partial h_2}{\partial u_1}h_3 + A_1h_2\frac{\partial h_3}{\partial u_1}\right)du_1du_2du_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3)du_1du_2du_3
\end{aligned} \tag{40}$$

となる。ここでは丁寧に計算したが、$A_1h_2h_3$ で一つの関数と考え (u_1, u_2, u_3) を独立変数と考えれば、もっと簡単に式 (40) を求めることができる。即ち、この関数の一次の変化量は、

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3)du_1 \tag{41}$$

となる。これに、du_2du_3 を乗算すれば、式 (40) と同じ結果が得られる。

残りの面に関しても、式 (40) を $1 \to 2 \to 3$ の順にサイクリックに入れ替えれば求めることができる。これらの全てのフラックスを合計して、局面座標の微少体積要素で式 (36) を考えると

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3)du_1du_2du_3 + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_3h_1)du_1du_2du_3 + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)du_1du_2du_3}{h_1du_1h_2du_2h_3du_3} \\
&= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)\right]
\end{aligned} \tag{42}$$

となる。これが、局面座標系の発散を求める式である。

[7] 成分は内積を計算すれば、求められる。 $A_1 = \boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}_1$である。

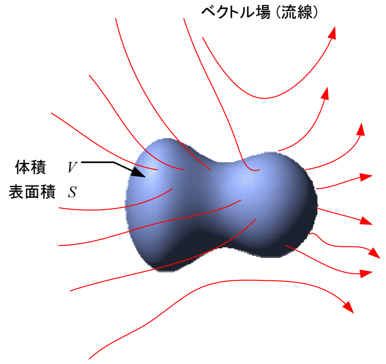

図 7: 囲まれた領域とベクトル場

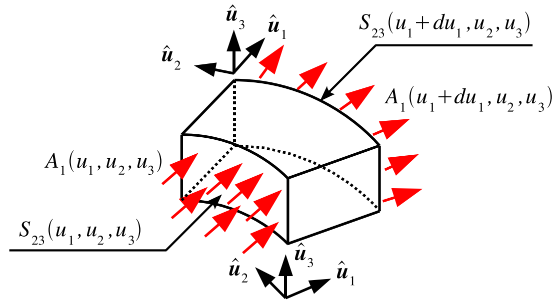

図 8: u_2, u_3 面での発散

5.3 回転

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(u_1, u_2, u_3)$ の回転 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ は、面積要素の縁のベクトルの線積分をその面積で割ることにより求められる。これは、面の法線方向に向かったベクトル量となる。図 9 のように計算する面は任意で、値はその放線方向のベクトルの成分となる。通常は、計算が便利な、u_1 あるいは u_2、u_3 が一定のそれぞれの面で計算する。図 10 に示すように、3 つの面が交わるところが、(u_1, u_2, u_3) の位置を示し、その曲面の微少面で回転を計算する。そして、計算された回転の成分は、この曲面の法線方向で表すことができる。例えば、図 9 のように u_1 が一定の曲面の閉じた領域を考える。ここで、その領域の縁のベクトルを線積分してその面積で割るのである。面積要素をどんどん小さくすると、形状に依存しないである値に近づく。この一定の値が、ベクトル場の回転の u_1 方向成分である。これは、u_2、u_3 一定のそれぞれの面で考えることができるので、ベクトル場のある点で 3 成分の値を持つことになる。そして、これはベクトル量になる。これが、ベクトル場の回転である。これを式で表すと、

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \lim_{S\to 0} \frac{\oint_\Gamma \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{\ell}}{\int_S dS} \tag{43}$$

となる。ここで、分母は面積となり、分子は面の縁の接線方向のとベクトル場の線積分となる。これもまた、分母/分子の極限を計算しているので、ベクトル場の微分となっている。

発散のときと同様に、曲線座標系の微少面積要素を用いて、その微分の内容を求めてみよう。u_1 が一定の場合の微少体面積要素は、du_2 と du_3 からなる面で、図 11 のようになっている。ベクトル場の変化やスケール因子の変化をよく考えて、回転を求める。式 (43) の $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ 方向の成分を計算することにする。この式の右辺の分母の面積要素は、式 (24) で示されているので、回転の総量を表す分子の計算を行う。これは、反時計回りにベクトル場の接線成分を線積分することにより求められる。図から分かるように、ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の $\hat{\boldsymbol{u}}_2$ 方向成分 A_2 は、一方の辺では積分の方向と同じで、対向する辺では逆になる。また、この 2 辺ではで、ベクトル A_2 の値の他にスケール因子の値も異なることに注意する事は発散のの計算と同じである。

$\hat{\boldsymbol{u}}_2$ 方向の u_3 での、それぞれの値を A_2, h_3(図 11 の右の辺) とすると、$u_3 + du_3$ でのそれらは、

$$A_2(u_3 + du_3) = A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial u_3} du_3 \tag{44}$$

$$h_2(u_3 + du_3) = h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial u_3} du_3 \tag{45}$$

となる。従って、この 2 面 (図の右と左の辺) の回転の寄与は、

$$\begin{aligned} & A_2 h_2 du_2 - \left(A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial u_3} du_3\right)\left(h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial u_3} du_3\right) du_2 \\ &= -\left(A_2 \frac{\partial h_2}{\partial u_3} + \frac{\partial A_2}{\partial u_3} h_2\right) du_2 du_3 \\ &= -\frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_2 h_2\right) du_2 du_3 \end{aligned} \tag{46}$$

となる。符号に気をつけて、同様のことを図 11 の上と下の辺で行うと、そこでの回転の総量は

$$\frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_3 A_3\right) du_2 du_3 \tag{47}$$

となる。以上より、上下左右のすべての辺の線積分がわかった。面積要素は、$h_2 h_3 du_2 du_3$ と分かっている。これから、線積分を面積で割った $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ 方向の回転は

$$\begin{aligned} (\nabla \times \boldsymbol{A})_1 &= \frac{\frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_3 A_3\right) du_2 du_3 - \frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_2 h_2\right) du_2 du_3}{h_2 h_3 du_2 du_3} \\ &= \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_3 A_3\right) - \frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_2 h_2\right)\right] \end{aligned} \tag{48}$$

となる。残りの 2 成分は、成分を表す記号を 1 → 2 → 3 とサイクリックに変えれば求められる。従って、回転は

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{A} =& \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(A_3 h_3\right) - \frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_2 h_2\right)\right] \hat{\boldsymbol{u}}_1 \\ &+ \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_1 h_1\right) - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(A_3 h_3\right)\right] \hat{\boldsymbol{u}}_2 \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(A_2 h_2\right) - \frac{\partial}{\partial u_2}\left(A_1 h_1\right)\right] \hat{\boldsymbol{u}}_3 \end{aligned} \tag{49}$$

となる。ただ、この式は長くて憶えにくい。そこで、通常は、

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{\boldsymbol{u}}_1 & h_2 \hat{\boldsymbol{u}}_2 & h_2 \hat{\boldsymbol{u}}_2 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{vmatrix} \tag{50}$$

とする事が多い。

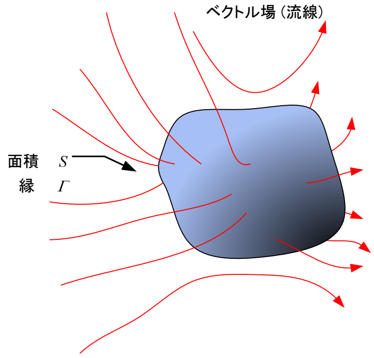

図 9: 囲まれた面とベクトル場

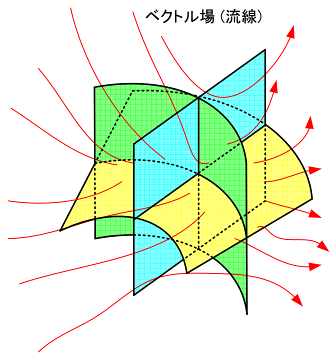

図 10: u_1 あるいは u_2 あるいは u_3 が一定の面

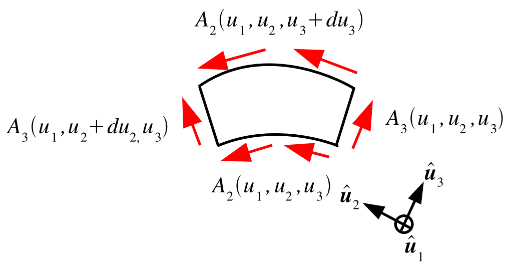

図 11: u_2, u_3 面での発散

6　いろいろな座標系の微分

これで、すべての準備が整った。電磁気学でよく使われる 3 つの座標系の微分を求めよう。それぞれの座標系とそのスケール因子は、表 1 に示している。微分は、式 (34) と (42)、(50) を使う。

6.1　カーテシアン座標系

カーテシアン座標系では、通常、単位ベクトルには $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ が使われる。そして、この座標系のスケール因子 $(1, 1, 1)$ を使うと、微分は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{1 \times \partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{1 \times \partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{1 \times \partial z}\boldsymbol{k} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot A &= \frac{1}{1 \times 1 \times 1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(A_x \times 1 \times 1\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A_y \times 1 \times 1\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z \times 1 \times 1\right)\right] \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times A &= \frac{1}{1 \times 1 \times 1}\begin{vmatrix} 1 \times \boldsymbol{i} & 1 \times \boldsymbol{j} & 1 \times \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_z \times 1 & A_y \times 1 & A_z \times 1 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{53}$$

6.2　円柱座標系

円柱座標系での単位ベクトルを $(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ とする。そして、この座標系のスケール因子 $(1, r, 1)$ を使うと、微分は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{1 \times \partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial f}{r \times \partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{1 \times \partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot A &= \frac{1}{1 \times r \times 1}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(A_r \times r \times 1\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\theta \times 1 \times 1\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z \times 1 \times r\right)\right] \\ &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial A_z}{\partial z}\right]\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times A &= \frac{1}{1 \times r \times 1}\begin{vmatrix} 1 \times \hat{\boldsymbol{r}} & r \times \hat{\boldsymbol{\theta}} & 1 \times \hat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r \times 1 & A_\theta \times r & A_z \times 1 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{r}} + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned} \tag{56}$$

6.3 極座標系

極座標系の単位ベクトルを $(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}})$ とする。そして、この座標系のスケール因子 $(1, r, r\sin\theta)$ を使うと、微分は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{1\times\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial f}{r\times\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{r\sin\theta\times\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial f}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned} \nabla\cdot A &= \frac{1}{1\times r\times r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(A_r\times r\times r\sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta\times r\sin\theta\times 1\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A_\varphi\times 1\times r\right)\right] \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned} \nabla\times A &= \frac{1}{1\times r\times r\sin\theta}\begin{vmatrix} 1\times\hat{\boldsymbol{r}} & r\times\hat{\boldsymbol{\theta}} & r\sin\theta\times\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r\times 1 & A_\theta\times r & A_\varphi\times r\sin\theta \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{\boldsymbol{r}} + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned} \tag{59}$$

7 付録

7.1 問題のある勾配の計算

非常に問題のある曲線座標の勾配の求め方を示す。スカラー場 f は位置の関数であるため、独立変数 (u_1, u_2, u_3) を使って、

$$f = f(u_1, u_2, u_3) \tag{60}$$

と書くことができる。この関数の全微分を計算して、勾配を計算するように変形する。

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3}du_3 \\ &= \frac{\partial f}{h_1\partial u_1}h_1du_1 + \frac{\partial f}{h_2\partial u_2}h_2du_2 + \frac{\partial f}{h_3\partial u_3}h_3du_3 \\ &= \left(\frac{\partial f}{h_1\partial u_1}, \frac{\partial f}{h_2\partial u_2}, \frac{\partial f}{h_3\partial u_3}\right)\cdot(h_1du_1, h_2du_2, h_3du_3) \\ &= \left(\frac{\partial f}{h_1\partial u_1}, \frac{\partial f}{h_2\partial u_2}, \frac{\partial f}{h_3\partial u_3}\right)\cdot d\boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{61}$$

これを、式 (28) と比べることにより、

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial f}{h_1\partial u_1}, \frac{\partial f}{h_2\partial u_2}, \frac{\partial f}{h_3\partial u_3}\right) \tag{62}$$

と、勾配を求めることができる。

この方法の問題は、式 (61) の 3 行目である。確かに、内積の右側の項は

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= (h_1 du_1, h_2 du_2, h_3 du_3) \\ &= h_1 du_1 \hat{\boldsymbol{u}}_1 + h_2 du_2 \hat{\boldsymbol{u}}_2 + h_3 du_3 \hat{\boldsymbol{u}}_3 \end{aligned} \tag{63}$$

でベクトルになっている。しかし、左の項

$$\left(\frac{\partial f}{h_1 \partial u_1}, \frac{\partial f}{h_2 \partial u_2}, \frac{\partial f}{h_3 \partial u_3} \right) = \frac{\partial f}{h_1 \partial u_1} \hat{\boldsymbol{u}}_1 + \frac{\partial f}{h_2 \partial u_2} \hat{\boldsymbol{u}}_2 + \frac{\partial f}{h_3 \partial u_3} \hat{\boldsymbol{u}}_3 \tag{64}$$

はベクトルとは限らない。この場合は、たまたまベクトルになっており、正しい結果が得られただけである。

参考文献

[1] ジョージ・アルフケン. ベクトル・テンソルと行列. 基礎物理学 1. 講談社, 1993.