軸対称電場の汎関数

山本昌志*

2005 年 1 月 18 日

1　はじめに

ここでは、軸対称の静電場の汎関数を示す。この辺の話は、軸対称の静磁場の話とよく似ている。

2　電子銃

高電圧機器を設計するとき、電場をできるだけ小さくすることが重要である。そのために、静電場の計算をすることがある。たとえば、高電圧用の碍子の設計などに使われる。その他、高電圧機器の設計に使われている。

私が携わった加速器では、様々な高電圧機器が使われている。その中でも、図 1 のような電子銃の静電場の計算は重要である。そこからでてくる電子ビームの質が、その電極の設計に大きく依存しているからである。実際には、静電場のみならず、電子ビームが作る電磁場も考慮して設計される。とはいえ、静電場の計算が最も重要で、ここではそれを計算するために必要な汎関数を示すことにする。ここでは軸対称構造の汎関数を示す。それは電子銃の構造が軸対称であるからである。他の対称性がある場合でもよく似た計算を行えばよい。

電子銃は加速器のみならず、テレビなどの Cathode Ray Tube(CRT) にも使われている。CRT の最後部には電子銃があり、そこから細い電子ビームを打ち出し、ブラウン管表面の蛍光物質に衝突させることにより、点を発光させている。発光させる点を高速に走査することにより、1 枚の絵を完成させる。その絵を 1 秒間に 30 枚作ることにより、動画にしている。このような仕組みの CRT にも電子銃が使われており、かなり身近な機器である。

*独立行政法人秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

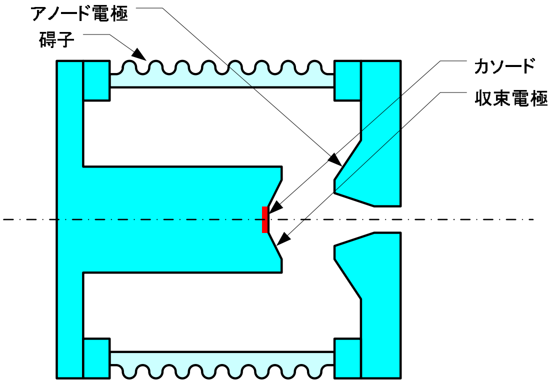

図 1: 電子銃

3 静電場が満たす偏微分方程式

3.1 スカラーポテンシャル

まずは、静電場が満たす方程式を示す。これはマクスウェルの方程式の時間の項をゼロとした式になる。それは、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{2}$$

と書き表せる。ここで、$\boldsymbol{D}$ は電束密度、$\boldsymbol{H}$ は電場の強さ、$\boldsymbol{\rho}$ は電荷密度を表す。ただし、物質中では

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{3}$$

の関係がある。ここで、ε は誘電率である。これは、異方性の物質では 2 階のテンソルとなる。しかし、ほとんど実用に使われている物質は、等方的である。そこで、ここでは、等方的な物質のみを考えることにする。すると、それはスカラー量として取り扱うことができ、計算が簡単になる。静電場の問題は、全て電束密度と電場の関係式 (3) を用い、連立偏微分方程式 (1) と (2) を解くことになる。これで、全てであるが、問題によっては簡単に解けないのである。問題に応じた解法が必要となってくるが、基本はこれらの方程式であることを忘れてはならない。

通常、静電場の問題では電場 $\boldsymbol{E}$ を計算するより、ポテンシャルを計算する方が簡単である。電場はベクトルで未知数が 3 個あるが、ポテンシャルはスカラーなので未知数が 1 個で済む。どう見ても計算が簡単である。このポテンシャル ϕ は、正確にはスカラーポテンシャルと言い

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi \tag{4}$$

と定義される。こうすることにより、静電場のマクスウェルの方程式 (2) が自動的に満足される[1]。

[1]回転の勾配はゼロである。全ての勾配はうずなしである

これで、静電場のマクスウェルの方程式のひとつが満足したので、残りを満足させるためのスカラーポテンシャルの条件を探せばよい。残りの式 (1) と式 (3)、そしてスカラーポテンシャルの定義とから、

$$\begin{aligned}\rho &= \nabla \cdot \boldsymbol{D} \\ &= \nabla \cdot \varepsilon \boldsymbol{E} \\ &= -\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi)\end{aligned} \tag{5}$$

が直ちに分かる。これが静電場を計算するときのスカラーポテンシャルが満たすべき偏微分方程式である。右辺と左辺を入れ替えて、見栄えよく記述すると

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = -\rho \tag{6}$$

となる。以前求めた、静磁場のベクトルポテンシャルが満足する偏微分方程式と似た形をしている。次節では、この汎関数を示す。

汎関数を示す前に、もう少し一般的なことを述べておく。誘電率は一定と考えることが多い。その場合、誘電率は積分の外に出すことができ、

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{7}$$

となる。これは、ポアッソン (Poisson) 方程式と呼ばれる。また、計算する領域内に電荷が無い問題も多く、その場合は

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{8}$$

となる。これは、ラプラス (Laplace) 方程式と呼ばれる。

実際の静電場の問題では、マクスウェルの方程式から直接導かれる式 (1) や (2) の代わりに、適当な境界条件を課して、式 (6) や (7)、(8) を計算することにある。これらの式のうち、条件に適合した最も簡単式を選択するのは言うまでもない。次節ではもっとも条件の厳しい、式 (6) の汎関数を示す。

3.2 汎関数

静磁場の汎関数から、静電場のそれは

$$F[\phi] = \int \left[\frac{\varepsilon}{2} (\nabla \phi)^2 - \rho \phi \right] dV \tag{9}$$

と想像できる。本当かどうか、この式の第一変分 δF を計算し、それがゼロになる条件を考えることにする。第一変分は、ϕ を $\delta\phi$ 変化させたときの微小変化量で

$$
\begin{aligned}
\delta F &= F[\phi+\delta\phi]-F[\phi] \\
&= \int\left[\frac{\varepsilon}{2}\left\{\nabla\left(\phi+\delta\phi\right)\right\}\cdot\left\{\nabla\left(\phi+\delta\phi\right)\right\}-\rho\cdot\left(\phi+\delta\phi\right)\right]dV \\
&\qquad -\int\left[\frac{\varepsilon}{2}\left(\nabla\phi\right)^2-\rho\phi\right]dV \\
&= \int\left[\frac{\varepsilon}{2}\left\{\left(\nabla\phi\right)^2+2\left(\nabla\phi\right)\cdot\left(\nabla\delta\phi\right)+\left(\nabla\delta\phi\right)^2\right\}-\rho\phi-\rho\delta\phi\right]dV \\
&\qquad -\int\left[\frac{\varepsilon}{2}\left(\nabla\phi\right)^2-\rho\phi\right]dV \\
&\qquad \text{2 次の微少量を無視すると} \\
&= \int\left[\varepsilon\left(\nabla\phi\right)\cdot\left(\nabla\delta\phi\right)-\rho\delta\phi\right]dV \\
&\qquad \text{ベクトル恒等式 } \nabla\cdot(\boldsymbol{V}f)=\boldsymbol{V}\cdot\nabla f+f\nabla\cdot\boldsymbol{V} \text{ を上手につかう} \\
&\qquad \boldsymbol{V}=\varepsilon(\nabla\phi),\quad f=\delta\phi \text{ とする。} \\
&= \int\left[\nabla\cdot\{\varepsilon(\nabla\phi)\delta\phi\}-\delta\phi\nabla\cdot\{\varepsilon(\nabla\phi)\}-\rho\delta\phi\right]dV \\
&\qquad \text{この式の第 1 項に発散定理を使い、式を整理すると} \\
&= \int\varepsilon(\nabla\phi)\delta\phi\cdot\boldsymbol{n}dS+\int\left[\nabla\cdot(\varepsilon\nabla\phi)-\rho\right]\delta\phi dV
\end{aligned} \tag{10}
$$

となる。

いつものように、任意の $\delta\phi$ に対して、この第一変分 δF がゼロになる条件を考える。そのためには、式 (10) の右辺の第 1 項と第 2 項の被積分関数がともにゼロになる必要がある。まず、第 1 項であるが、それは

$$(\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{n}=0 \tag{11}$$

$$\delta\phi=0 \tag{12}$$

のいずれかである。最初の条件はノイマン条件で、何も境界条件を指定しなければ、電場と境界は平行になると言うことであ。2 番目のものは、境界でのスカラーポテンシャルを指定するディレクレ条件である。即ち、第一変分の右辺第 1 項は境界条件を表すのである。

次に、第 2 項であるが、これは計算している領域で

$$\nabla\cdot(\varepsilon\nabla\phi)-\rho=0 \tag{13}$$

となる必要がある。これは、スカラーポテンシャルを用いた静電場のマクスウェルの方程式そのもので、式 (6) と等しい。

以上のことから、静電場を計算するためには、式 (9) の第一変分をゼロにすればよいことが分かる。静電場のマクスウェルの方程式は、式 (9) の第 1 変分をゼロにするのと等しいのである。

4　軸対称問題

軸対称問題は、円柱座標系を使うのがセオリーである。この場合、解析する機器の形状は完全軸対称で、電荷分布も同じである。スカラーポテンシャルはスカラー量なので、ベクトルポテンシャルのように煩わしいことはなにもない。有限要素法で計算するときには、ただ汎関数の値を求めれば良いのである。

静電場の汎関数は式 (9) で示したとおりである。この式にはスカラーポテンシャルの勾配の演算が含まれる。円柱座標系の勾配は、以前示したとおり、

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{14}$$

である。軸対称構造の静電場には、$\boldsymbol{E}_\theta$ がゼロである。従って、スカラーポテンシャルの勾配の $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 成分はゼロになる。そのため、スカラーポテンシャルは

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{15}$$

となる。

この回転の結果を汎関数の式 (9) に適用すると、

$$F[\phi] = \int\left[\frac{\varepsilon}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2\right\} - \rho\phi\right]2\pi r dr d\theta \tag{16}$$

となる。

特に静電場の場合は、ラプラス方程式を計算することが多く、その場合は、式 (16) を $\rho = 0$ とすればよい。するの、その式は静電場のエネルギーを表す式になる。その第一変分がゼロということは、安定状態はエネルギーが停留値になることで、一般には最低エネルギーになる。エネルギーがもっとも小さいときが安定なのである。