軸対称電磁石の汎関数

山本昌志*

2005 年 1 月 17 日

1　はじめに

軸対称構造の電磁石の磁場を計算するときの、汎関数を示す。この辺の話は、主にシルベスタとフェラーリの教科書 [1] を参考にした。ただ、説明方法をかなり変えているので、間違いがあるかもしれない。その場合は、この教科書ではなく私の理解の仕方に問題があるものと考えられる。そのときは、いろいろ指摘をいただきたい。

2　電磁石

電磁石は、様々なところで使われている。モーターが身近な例で、家庭内にたくさんある。これは、電気エネルギーを力学的な回転のエネルギー変換する機械で、エネルギー変換効率やトルクなどによって性能が決められる。使用目的に応じた最適のモーターを設計するためには、磁場解析は重要である。この例でも分かるように、磁場を利用した機器を設計する場合、コンピューターによる磁場解析は必要不可欠な技術である。かつてのように、磁場解析をしないで設計するとなると、数多くの試作品を作り最適なパラメーターを探すことになる。そのような方法での開発は、コストが非常にかかり無駄である。これを省くために、コンピューターによる解析が発達した。

電磁石には目的に応じて、いろいろな形のものが使われている。ここでは、図 1 に示すような、軸対称性を持った磁石の解析を行う。この例で示した磁石は、磁気レンズと呼ばれ、電子顕微鏡や加速器の電子ビームを収束するために使われている。

*独立行政法人秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

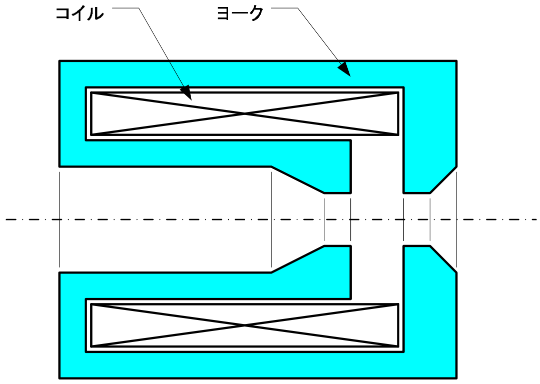

図 1: 磁気レンズ

3　磁場が満たす偏微分方程式

3.1　ベクトルポテンシャル

まずは、電磁石の磁場が満たす方程式を示す。これは静磁場のマクスウェルの方程式で、その時間の項をゼロとした式になる。それは、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \tag{2}$$

と書き表せる。ここで、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度、$\boldsymbol{H}$ は磁場の強さ、$\boldsymbol{j}$ は電流密度を表す。ただし、物質中では

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{3}$$

の関係がある。ここで、μ は透磁率である。これは、異方性の物質では 2 階のテンソルとなる。しかし、ほとんど実用に使われている物質は、等方的である。そこで、ここでは、等方的な物質のみを考えることにする。すると、それはスカラー量として取り扱うことができ、計算が簡単になる。

ここで解析しようとする軸対称問題では、ベクトルポテンシャルを使う方が、後で示すように、式が簡単になる。ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の定義は、

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{4}$$

である。これと式 (3) から、直ちに

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{5}$$

が分かる。この式の両辺に回転の演算を施し、式 (2) を使うと

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \boldsymbol{A} \right) = \boldsymbol{j} \tag{6}$$

が得られる。これが、ベクトルポテンシャルが満たす偏微分方程式である。実際の磁場は、このベクトルポテンシャルを計算して、微分 (回転) することにより得られる。

3.2　汎関数

いろいろな教科書に書かれているように、式 (6) の汎関数は

$$F[\boldsymbol{A}] = \int \left[\frac{1}{2\mu} (\nabla \times \boldsymbol{A})^2 - \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A} \right] dV \tag{7}$$

である。本当かどうか、この式の第一変分 δF を計算し、それがゼロになる条件を考えることにする。第一変分は、$\boldsymbol{A}$ を $\delta \boldsymbol{A}$ 変化させたときの微小変化量で

$$\begin{aligned}
\delta F &= F[\boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A}] - F[\boldsymbol{A}] \\
&= \int \left[\frac{1}{2\mu} \{\nabla \times (\boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A})\} \cdot \{\nabla \times (\boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A})\} - \boldsymbol{j} \cdot (\boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A}) \right] dV \\
&\qquad - \int \left[\frac{1}{2\mu} (\nabla \times \boldsymbol{A})^2 - \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A} \right] dV \\
&= \int \left[\frac{1}{2\mu} \left\{ (\nabla \times \boldsymbol{A})^2 + 2 (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot (\nabla \times \delta \boldsymbol{A}) + (\nabla \times \delta \boldsymbol{A})^2 \right\} - \boldsymbol{j} \cdot (\boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A}) \right] dV \\
&\qquad - \int \left[\frac{1}{2\mu} (\nabla \times \boldsymbol{A})^2 - \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A} \right] dV \\
&\qquad \text{2 次の微少量を無視すると} \\
&= \int \left[\frac{1}{\mu} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot (\nabla \times \delta \boldsymbol{A}) - (\delta \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j}) \right] dV \\
&\qquad \text{ベクトル恒等式 } \nabla \cdot (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{V}) - \boldsymbol{V} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{W}) \text{ を上 手につかう} \\
&\qquad \boldsymbol{V} = 1/\mu (\nabla \times \boldsymbol{A}), \boldsymbol{W} = \delta \boldsymbol{A} \text{ とする。} \\
&= \int \left[-\nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\mu} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \times \delta \boldsymbol{A} \right\} + \delta \boldsymbol{A} \cdot \left\{ \nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \right\} - (\delta \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j}) \right] dV \\
&\qquad \text{この式の第 1 項に発散定理を使い、式を整理すると} \\
&= - \int \frac{1}{\mu} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \times \delta \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS + \int \left[\left\{ \nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{j} \right\} \cdot \delta \boldsymbol{A} \right] dV
\end{aligned} \tag{8}$$

となる。

いつものように、任意の $\delta \boldsymbol{A}$ に対して、この第一変分 δF がゼロになる条件を考える。そのためには、式 (8) の右辺の第 1 項と第 2 項の被積分関数がともにゼロになる必要がある。まず、第 1 項であるが、それは

$$(\nabla \times \boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{n} = 0 \tag{9}$$

$$\delta \boldsymbol{A} = 0 \tag{10}$$

のいずれかである[1]。最初の条件はノイマン条件で、何も境界条件を指定しなければ、磁場は境界と垂直になる。2 番目のものは、境界でのベクトルポテンシャルを指定するディレクレ条件である。即ち、第一変分の右辺第 1 項は境界条件を表すのである。

次に、第 2 項であるが、これは計算している領域で

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{j} = 0 \tag{11}$$

[1]最初の式は、ベクトルの 3 重積を考えれば直ちに導くことができる。

となる必要がある。これは、ベクトルポテンシャルを用いた静磁場のマクスウェルの方程式そのもので、式 (6) と等しい。

以上のことから、静磁場を計算するためには、式 (7) の第一変分をゼロにすればよいことが分かる。静磁場のマクスウェルの方程式は、式 (7) の第 1 変分をゼロにするのと等しいのである。

4 軸対称問題

軸対称問題は、円柱座標系を使うのがセオリーである。この場合、磁石の形状は完全軸対称で、電流は $\hat{\theta}$ 方向のみに流れる。そして、作られる磁場は $\hat{r}$ と $\hat{z}$ 方向である。この場合、ベクトルポテンシャルを $\hat{\theta}$ 方向のみにとることができる。従って、H_r と H_z を計算するより、A_θ を計算して、その回転から磁場を求める方が簡単である。

静磁場の汎関数は式 (7) で示したとおりである。この式にはベクトルポテンシャルの回転の演算が含まれる。円柱座標系の回転は、以前示した[2]とおり、

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{r}}+\left[\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{z}} \tag{12}$$

である。ここでは、ベクトルポテンシャルは A_θ のみであるため

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A} &= \left[-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)\right]\hat{\boldsymbol{z}}\\ &= \left(-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{r}}+\left(\frac{A_\theta}{r}+\frac{\partial A_\theta}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned} \tag{13}$$

となる。

この回転の結果を汎関数の式 (7) に適用すると、

$$\begin{aligned}F[A_\theta] &= \int\left[\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2\mu}\left(\frac{A_\theta}{r}+\frac{\partial A_\theta}{\partial r}\right)^2-j_\theta A_\theta\right]dV\\ &= \int\left[\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{\mu}\frac{A_\theta}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial r}+\frac{1}{2\mu}\left(\frac{A_\theta}{r}\right)^2-j_\theta A_\theta\right]2\pi r dr dz\end{aligned} \tag{14}$$

となる。

参考文献

[1] R.L. フェラーリ P.P シルベスタ. 有限要素法による電磁界解析. Information & Computing-26. サイエンス社, 1989.

[2] http://www.akita-nct.jp/ yamamoto/study/electromagnetics/coodinate_transform/html/node6.html#SECTION00062000000000000000