

静磁場解析のための二次要素を用いる有限要素法の研究

生産システム工学専攻 宮田 翔吾

1. 緒言

加速器には様々な電磁石が使われており、高い磁場精度が要求される。これを実現するためには加工精度のみならず、精度の高いシミュレーションが必要である。現在では目的に応じて様々なコードが開発され、電磁石の設計に使われている。

一般に電磁石は三次元構造をしており、三次元解析が多く使われている。しかし、対称性を考慮することで、二次元問題として取り扱い可能なものも多くある。このことから、今後も三次元のみならず、二次元解析も必要である。そこで本研究では、高精度な二次元の静磁場解析コードを開発することにした。

開発したコードでは、有限要素法を用いて解析を行った。解析の精度を向上させるためには、一次要素よりも二次要素の方が有利である。本研究では精度向上を目指し、二次要素による解析を進めることにした。

2. 研究方法

本研究では完全軸対称構造の電磁石を取り扱う。そのため、円柱座標系を用いて二次元問題にすることができ、また、電流は $\hat{\theta}$ 方向のみと仮定するので、ベクトルポテンシャル A は $\hat{\theta}$ 方向のみとなる。磁場は H_r 、 H_z の二つの成分を持つが、ベクトルポテンシャルは A_θ のみの成分になるため、式が単純になる。このようなことから、ベクトルポテンシャル A を用いて静磁場を求める。

静磁場のベクトルポテンシャル A は

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times A) = j \quad (1)$$

を満足する。これは軸対称静磁場の場合、汎関数

$$F[A_\theta] = \iint \left[\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{A_\theta}{r} \right)^2 - j_\theta A_\theta \right] 2\pi r dr dz \quad (2)$$

の極値問題と等価である。これをコンピュータで計算する場合、離散化する必要がある。そこで、式(2)から二次要素に対応した離散化式を導きだした。

導き出した離散化式を用いて、プログラミングを行い解析コードを作成した。作成したコードの妥当性を検証するために、二次元静磁場解析にしばしば用いられる POISSON と比較を行うことにした。さらに詳しく差を調べるために、POISSON との差を定量的に評価することにした。

3. 研究結果

本研究では、二次要素を用いた有限要素法による軸対称静磁場の解析コードを作成した。作成したコードの妥当性を検証するため、POISSON と比較した。図1に r 方向の磁場 B_r 、 z 方向の磁場 B_z を POISSON の結果とともに示す。ここで、実線が POISSON、丸とひし形が作成したコードの計算結果である。図より、磁場の概形がよく一致していた。このことから、二次要素を用いて導きだした離散化式と、作成したコードは妥当であると考えている。

また、POISSON との差を定量的に評価した結果、 r 方向、 z 方向ともに約 2% の差が生じた。現段階では差の原因が不明である。この 2% の差は大きいと、詳しく原因を追及する必要があるだろう。

現在は三角形要素を直線要素で近似しているため、計算領域が曲面の場合、誤差が大きくなる。これを改善するために、曲線要素を用いる必要がある。また、強磁性体ではヒステリシスが存在しているので、それも取り扱いたい。これらを考慮して、実際の静磁場解析に利用できるようにすべきと考えている。

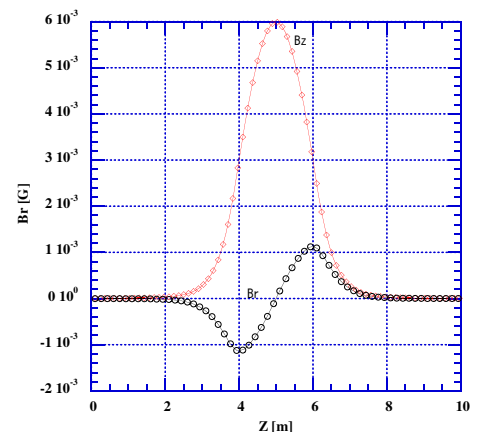


図1: 作成したコードと POISSON との磁場の比較結果