# 電磁場解析のための２次要素を使った有限要素法の研究

生産システム工学専攻　　夏井 拓也

## 1. 諸言

加速器の設計には様々なシミュレーションコードを用いる．その計算精度は加速器の性能に影響をおよぼすため，その精度向上は重要な課題となっている．本研究では，加速空洞内の電磁場を従来よりも高精度で計算することを目標にシミュレーションコードの開発を行った．その結果，軸対称構造空洞内の共振周波数において従来の計算コードの精度を $10^4$ 程度上回る計算が可能になった．

## 2. 研究方法

本研究の計算手法は有限要素法での高周波電磁場解析である．計算精度を向上させるため，従来多く用いられてきた三角形１次要素ではなく，三角形２次要素を用いた．また，解析領域の境界が曲線の場合に形状誤差を軽減するため，曲線境界では曲線２次要素を用いた．これら三角形２次要素と曲線２次要素を使用した点が本研究の特徴である．

空洞内の電磁場はヘルムホルツ方程式に従うので，有限要素法を用いてこの式を解くことになる．有限要素法を適用するためには，解くべき式の汎関数が必要になる．従って，軸対称構造空洞における定在波 $\mathrm{TM}_0$ モードを解析するための汎関数

$$J[H_\theta] = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \right)^2 + 2\frac{H_\theta}{r}\frac{\partial H_\theta}{\partial r} + \left( \frac{H_\theta}{r} \right)^2 - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 H_\theta^2 \right] 2\pi r dr dz \tag{1}$$

を導きだした．この式が，解くべき汎関数となる．従って，式 (1) から２次要素と曲線要素に対応した離散化式を導いた．この離散化式は一般化固有値問題に還元される．この固有値問題を共役勾配法を用いて解くことにより解を得ている．本研究では，式 (1) を離散化した式を用いて，実際にプログラミングを行い計算コードを作成した．

また，この定在波モードの計算コードを応用し，進行波の計算も可能にした．これには，複素数での計算が必要となり，さらに，計算領域の両端に周期的境界条件を課すことになる．このような計算手法で，進行波も計算することができた．

## 3. 研究結果

作成した計算コードにより，高エネルギー加速器研究機構の PF の空洞を解析した結果を図１に示す．この空洞の共振周波数は 499.5MHz（測定値）であり，本研究で作成されたコードでは 499.557MHz と計算された．これにより，作成したコードに大きな間違いがないことを確認した．

また，計算誤差を定量的に調べるため，共振周波数の解析解が知られている球形空洞を用いて精度検証を行った．その結果，作成コードの精度は $2 \times 10^{-10}$ 程度であることが分かった．

さらに，複素数を使い周期的境界条件を課すことで，従来の計算コードでは不可能だった進行波の取り扱を可能にした．

本研究では，精度の向上と進行波の取り扱いを実現することができた．これにより，従来よりも高性能の電磁場解析コードを作成することができ，当初の目標を達成することができた．

今後の課題としては，この計算コードを GUI などを使い操作性を改善し，より実用的にしていくことがあげられる．

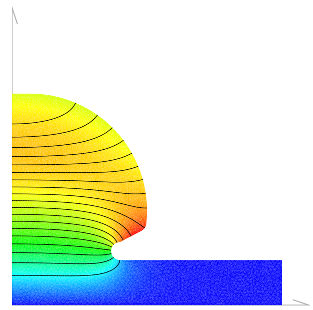

図 1: PF の空洞の計算結果