静磁場解析のための二次要素を用いる有限要素法の研究

宮田　翔吾 [1]

A study of the FEM using 2nd-order elements for a static magnetic field analysis

Shogo MIYATA [1]

Abstract

In order to control an exact orbit of charged particles, we must use high accuracy magnetic fields, which are requisite for accurate processing and good numerical simulation. So we are developing a code to analyze static magnetic fields in magnets with cylindrical symmetry. The developed code uses finite element method with 2nd-order elements. To confirm its accuracy of developing code, we compared calculation results with those of POISSON. As a result, the two magnetic field distributions agree within 2%. In this thesis, we will present numerical caluculation method, and its caluculation results, and point out the remaining problems.

key words: a static magnetic feild, FEM, 2nd-order elements

1　緒言

現在，加速器には様々な電磁石が使われており，荷電粒子ビームの制御に使われている．加速器に用いられる電磁石は高い磁場精度が要求され，それを実現するためには精度の高いシミュレーションが必要である．現在では目的に応じて，様々なコードが開発され，設計に使われている．

一般に，電磁石は三次元構造をしており，三次元解析が多く使われている．しかし，対称性を考慮して，二次元問題として取り扱い可能なものも多くある．このことから，今後も三次元のみならず，二次元解析も必要である．そこで，本研究では従来用いられてきたものよりも，精度の高い静磁場解析コードを開発することにした．静磁場解析は二次要素を用いた有限要素法により，行うことにした．従来の静磁場解析コードでは，一次要素を用いているものが主流であるが，二次要素を使うことにより，より高い精度が期待できる．

静磁場解析のため，離散化した二次要素の有限要素法の式を導くことから始め，計算コードを作成した．そして，そのコードの妥当性を検証するため，二次元静磁場解析にしばしば用いられる POISSON [1] と比較を行った．その結果，磁束密度の概形が一致し，コードの妥当性が確認できたので報告する．

[1] 生産システム工学

2　計算原理

2.1　磁場を求めるための汎関数

静磁場問題はマクスウェルの方程式の時間の項をゼロとした

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \tag{2}$$

を解くことになる．ここで，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度，$\boldsymbol{H}$ は磁場の強さ，$\boldsymbol{j}$ は電流密度を表す．ただし，物質中では

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{3}$$

の関係があり，μ は透磁率である．ここでは，等方的な物質のみを考えることにするので，μ はスカラー量として取り扱うことができる．

後での取り扱いが便利なように，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{4}$$

と導入しておく．ベクトルポテンシャルを用いると，式 (4) は式 (1) を自動的に満足するので，残っている式 (2) に代入した

$$\frac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{j} \tag{5}$$

が解くべき微分方程式となる．

しかし，この微分方程式をコンピュータによって，直接解くことは難しい．そこで，コンピュータで解きやすいように，変分法の原理を用いて，汎関数の停留値を解く問題に置き換える．オイラー方程式が式 (5) になる汎関数は，

$$F[\boldsymbol{A}]=\int\left[\frac{1}{2\mu}\left(\nabla\times\boldsymbol{A}\right)^2-\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\right]dV \tag{6}$$

である [2]．式 (5) を解くことと，この汎関数の停留値を求めることは等価である．式 (5) を解くことは，この汎関数を求める問題に帰着される．本研究では，この汎関数の停留値を有限要素法を用いて計算した．

2.2 軸対称問題

本研究では，電流が $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 方向のみに流れる完全軸対称構造の電磁石を取り扱う。この場合，形状は三次元であるが，対称性を考慮することにより，二次元問題として取り扱え，円柱座標系を用いるのが適当である．

電流は $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 方向のみと仮定しているので，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の向きは $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 方向となる．従って，ベクトルポテンシャルを使うと，$r-z$ 平面で A_θ のみを計算すればよく，式が単純になる．もし，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を計算すると B_r,B_z があり，変数が二個あるため，ベクトルポテンシャル A_θ のみの計算に比べ，困難になる．そのため，ベクトルポテンシャルを計算することにし，磁場はベクトルポテンシャル A_θ の回転として，式 (4) から求める．

汎関数，式 (6) を計算する必要があるが，これにはベクトルポテンシャルの回転の演算が含まれる．円柱座標系で，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 方向のみを持つベクトルポテンシャルの回転は，

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{r}}+\left(\frac{A_\theta}{r}+\frac{\partial A_\theta}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{7}$$

となる．これ以降は，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 方向のみなので，A_θ を A と記述する．この結果を汎関数の式 (6) に適用すると，

$$\begin{aligned}F[A]=\iint\Bigg[&\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{\mu}\frac{A}{r}\frac{\partial A}{\partial r}\\&+\frac{1}{2\mu}\left(\frac{A}{r}\right)^2-j_\theta A\Bigg]2\pi r dr dz\end{aligned} \tag{8}$$

となる．これより，積分領域が三次元から二次元になり，三次元問題が二次元問題になった．この式の停留値を持つ場合の A が，式 (5) の微分方程式の解になっている．

2.3 三角形二次要素

式 (8) の停留値を求めるためには，ベクトルポテンシャル A の関数形を決めなくてはならない．そのためには，ベクトルポテンシャルを簡単な関数で近似する必要がある．しかし，一般には広い範囲を一つの式で近似することは難しい．このような場合，領域を無数の小部分に分けて，各部分ごとに簡単な近似式を用いる．そして，小部分の和により，全体を近似する方法がとられる．これを変分問題に応用し，コンピュータを用いて解く方法が有限要素法である．

ここでは二次元問題なので，通常使われるように領域を三角形の網目状に分割する．そして，隣り合う三角形での A の値は連続になるようにする．領域を三角形分割した例を図 1 に示す．

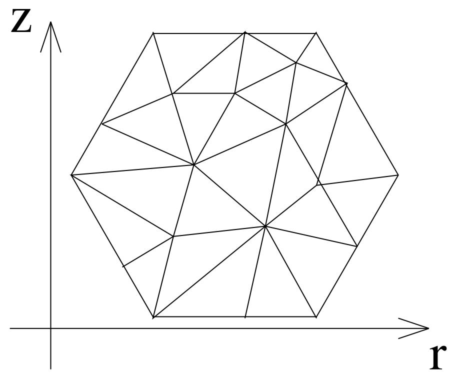

図 1: 三角形分割の例

積分領域あるいは電磁石の形状が直線で構成されていれば，三角形で形状を表現できる．しかし，領域や形状が曲線部分を含む場合は形状誤差が生じ，計算精度が低くなる．曲線形状が含まれる場合，分割を小さくすることにより，誤差を小さくすることが，よく用いられる．また，曲線要素を使う方法もあるが，ここでは分割を小さくすることにより，精度を向上させることにする．

問題の形状を表現する三角形は数多くあるが，その内の一つを取り出すと図 2 のようになっている．本研究では二次要素を用いるので，三角形の一つの要素に対して 6 個の点 (節点) が必要である．それらを図 2 のように設定し，三角形の頂点に 1，2，3，中点に 4，5，6 と番号付けをする．ここで，三角形要素内部での節点番号を局所番号とする．また，節点番号 i の点の座標を (r_i, z_i) とする．二次要素では，この六点の値を用いて要素内のベクトルポテンシャルを近似するため，2.6 節の式 (26) で述べるような二次近似が可能となる．一方，一次要素では頂点の三点のみによって近似するので，一次近似である．一般的に同じ計算量であれば，一次要素に比べ，二次要素の方が計算精度が良いことが分かっている．そのため，本研究では二次要素を用いることにした．

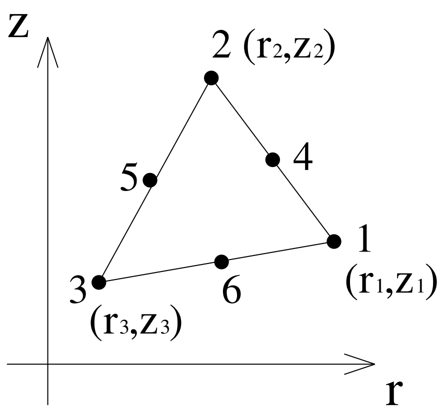

図 2: 分割後の三角形の例

2.4 形状関数

前節で述べたように，各三角形ごとにベクトルポテンシャル A を適当な関数で表す．有限要素法では区分多項式

$$A = A_1\phi_1 + A_2\phi_2 + \cdots + A_n\phi_n \tag{9}$$

を用いて，ベクトルポテンシャル A の近似を行う．ここで，n は節点の数である．この区分多項式を使うために，形状関数 $\phi_i(r,z)$ が必要となる．ここで，形状関数 $\phi_i(r,z)$ は各三角形領域において，

- 節点 i においては値が 1
- 他の節点においては値が 0
- 各三角形の内部では 2 次式

を満たすものとする．このような形状関数に，節点におけるベクトルポテンシャルの値を乗じて加えた式 (9) が，要素内のベクトルポテンシャルを表す．また，一つの I 番目の三角形領域では，

$$A = A_{(I)1}\phi_{(I)1} + A_{(I)2}\phi_{(I)2} + \cdots + A_{(I)6}\phi_{(I)6} \tag{10}$$

と記述する．ここで，$A_{(I)t}$ と $\phi_{(I)t}$ はそれぞれ，I 番目領域の局所番号 t のベクトルポテンシャルと形状関数である．

式 (10) はある任意の要素内のベクトルポテンシャル A を表す式である．領域全体では全ての要素の和で表現できる．従って，領域全体の A を表す式は，

$$\begin{aligned} A &= \sum_{I=1}^{N}\{A_{(I)1}\phi_{(I)1} + A_{(I)2}\phi_{(I)2} + \cdots + A_{(I)6}\phi_{(I)6}\} \\ &= \sum_{I=1}^{N}\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\phi_{(I)t} \end{aligned} \tag{11}$$

となる．ここで，N は三角形要素の数，t は三角形要素内部での節点番号 (局所番号) を表す．

2.5 離散化

領域全体のベクトルポテンシャル A が，式 (11) により表現できたので，それを用いて汎関数を求める．汎関数 $F[A]$ を式 (11) を用いて表すと，

$$\begin{aligned} F[A] = \sum_{I=1}^{N} \iint_{(I)} \Bigg[& \frac{1}{2\mu}\left\{\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\frac{\partial\phi_{(I)t}}{\partial z}\right\}^2 \\ & + \frac{1}{2\mu}\left\{\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\frac{\partial\phi_{(I)t}}{\partial r}\right\}^2 \\ & + \frac{1}{\mu r}\left\{\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\phi_{(I)t}\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\frac{\partial\phi_{(I)t}}{\partial r}\right\} \\ & + \frac{1}{2\mu r^2}\left\{\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\phi_{(I)t}\right\}^2 \\ & - j_\theta \sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\phi_{(I)t} \Bigg] 2\pi r dr dz \end{aligned} \tag{12}$$

となる．

これで関数 F の独立変数が，関数 A から変数 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ に置き換わり，計算が容易になる．これにより，関数 A を変化させて汎関数 $F[A]$ の停留値を求める問題が，多変数関数 $F(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ の極値を求める問題になる．これは，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ の偏微分が

ゼロになることと等価で，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F[A]}{\partial A_i} = 2\pi \iint_{(I)} \Bigg[& \frac{r}{2\mu}\frac{\partial}{\partial A_i}\left\{\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\frac{\partial \phi_{(I)t}}{\partial z}\right\}^2 \\
& + \frac{r}{2\mu}\frac{\partial}{\partial A_i}\left\{\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\frac{\partial \phi_{(I)t}}{\partial r}\right\}^2 \\
& + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial A_i}\left\{\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\phi_{(I)t}\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\frac{\partial \phi_{(I)t}}{\partial r}\right\} \\
& + \frac{1}{2\mu r}\frac{\partial}{\partial A_i}\left\{\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\phi_{(I)t}\right\}^2 \\
& - r j_\theta \frac{\partial}{\partial A_i}\left\{\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\phi_{(I)t}\right\}\Bigg] drdz \\
& + 2\pi \iint_{(J)} V_{(J)} drdz \\
& \vdots \\
& + 2\pi \iint_{(K)} V_{(K)} drdz
\end{aligned}
\tag{13}
$$

と書かれる．ここでの I,J,$\cdots$,K は，節点 i を共有する三角形領域である．ここで，$V_{(J)}$，$V_{(K)}$ は積分の内部は I，すなわち式 (13) の右辺第一項と同一で，三角形領域が J，K であることを表している．ここで，A_i が $A_{(I)1}$ から $A_{(I)6}$ のいずれかである $A_{(I)p}$ だとして，各項を A_i で偏微分した結果を以下に示す．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial A_i}\left(\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\frac{\partial \phi_{(I)t}}{\partial z}\right)^2 = 2\left(\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\frac{\partial \phi_{(I)t}}{\partial z}\right)\frac{\partial \phi_{(I)p}}{\partial z} \\
&\frac{\partial}{\partial A_i}\left(\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\frac{\partial \phi_{(I)t}}{\partial r}\right)^2 = 2\left(\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\frac{\partial \phi_{(I)t}}{\partial r}\right)\frac{\partial \phi_{(I)p}}{\partial r} \\
&\frac{\partial}{\partial A_i}\left(\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\phi_{(I)t}\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\frac{\partial \phi_{(I)t}}{\partial r}\right) \\
&= \phi_{(I)p}\left(\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\frac{\partial \phi_{(I)t}}{\partial r}\right) + \left(\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\phi_{(I)t}\right)\frac{\partial \phi_{(I)p}}{\partial r} \\
&\frac{\partial}{\partial A_i}\left(\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\phi_{(I)t}\right)^2 = 2\left(\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\phi_{(I)t}\right)\phi_{(I)p} \\
&\frac{\partial}{\partial A_i}\left(\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\phi_{(I)t}\right) = \phi_{(I)p}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

式 (14) で微分した結果を式 (13) に代入し，要素 I の寄与による項のみを書き出すと，

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial F[A]}{\partial A_i}\right|_{(I)} = 2\pi \iint_{(I)} \Bigg[& \frac{r}{\mu}\left(\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\frac{\partial \phi_{(I)t}}{\partial z}\right)\frac{\partial \phi_{(I)p}}{\partial z} \\
& + \frac{r}{\mu}\left(\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\frac{\partial \phi_{(I)t}}{\partial r}\right)\frac{\partial \phi_{(I)p}}{\partial r} \\
& + \frac{1}{\mu}\left\{\phi_{(I)p}\left(\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\frac{\partial \phi_{(I)t}}{\partial r}\right)\right\} \\
& + \frac{1}{\mu}\left\{\frac{\partial \phi_{(I)p}}{\partial r}\left(\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\phi_{(I)t}\right)\right\} \\
& + \frac{1}{\mu r}\left\{\phi_{(I)p}\left(\sum_{t=1}^{6} A_{(I)t}\phi_{(I)t}\right)\right\} \\
& - r j_\theta \phi_{(I)t}\Bigg] drdz
\end{aligned}
\tag{15}
$$

となる．ここで，$|_{(I)}$ の記号は要素 I の寄与による項であることを表す．これ以降は，要素 I の寄与による項のみを記述するので，記号を簡単に表すため，$A_{(I)}$，$\phi_{(I)}$ をそれぞれ A，ϕ と置く．次に式 (15) を A_t でまとめると，

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial F[A]}{\partial A_i}\right|_{(I)} = 2\pi \iint_{(I)} \Bigg[& \sum_{t=1}^{6} A_t \left\{\frac{r}{\mu}\frac{\partial \phi_t}{\partial z}\frac{\partial \phi_p}{\partial z} + \frac{r}{\mu}\frac{\partial \phi_t}{\partial r}\frac{\partial \phi_p}{\partial r}\right. \\
& \left. + \frac{1}{\mu}\phi_p\frac{\partial \phi_t}{\partial r} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial \phi_p}{\partial r}\phi_t + \frac{1}{\mu r}\phi_t\phi_p\right\} \\
& - r j_\theta \phi_p\Bigg] drdz
\end{aligned}
\tag{16}
$$

となる．これは全ての i について成り立つので，この式は連立方程式

$$
\boldsymbol{K}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{m} \tag{17}
$$

の形で表現できる．ここで，$\boldsymbol{A}$ は

$$
\boldsymbol{A} = \left\{\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right\} \tag{18}
$$

である．さらに，$\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{m}$ の行列の要素は

$$
\begin{aligned}
k_{ij}|_{(I)} = 2\pi \iint_{(I)} \Bigg[& \frac{r}{\mu}\frac{\partial \phi_p}{\partial z}\frac{\partial \phi_t}{\partial z} + \frac{r}{\mu}\frac{\partial \phi_p}{\partial r}\frac{\partial \phi_t}{\partial r} + \frac{1}{\mu}\phi_p\frac{\partial \phi_t}{\partial r} \\
& + \frac{1}{\mu}\frac{\partial \phi_p}{\partial r}\phi_t + \frac{1}{\mu r}\phi_p\phi_t\Bigg] drdz
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
m_i|_{(I)} = 2\pi j_\theta \iint_{(I)} r\phi_p drdz \tag{20}
$$

となる．ここで，三角形内部での節点 p と t は全体での節点 i，j である．

このようにして，各要素ごとに行列への寄与分を計算し，全ての要素について和をとることで，ベクトルポテンシャルを解くための行列を作ることができる．

2.6　座標変換

ベクトルポテンシャル A を求めるために，式 (19) や式 (20) のような積分計算が必要である．rz 座標系のままでは，積分領域や形状関数が複雑であるため，計算が非常に難しい．これは二重積分であり，三角形要素の座標がそれぞれ異なるためである．図 3 から図 4 のように，実際の形状を表す (r,z) 座標系から計算に適した (r',z') 座標系へ座標変換を施す．

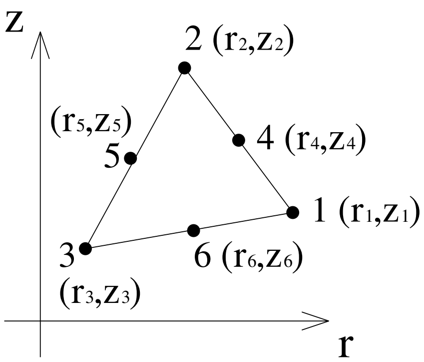

図 3: 全体座標系

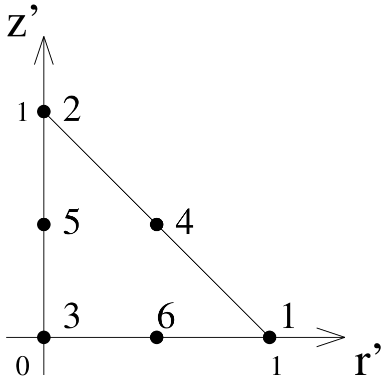

図 4: 局所座標系

この変換を全ての要素に実施することにより，全ての積分領域が図 4 のような同一の三角形となり，計算が容易になる．ここで，(r,z) 座標系を全体座標系，(r',z') 座標系を局所座標系と呼ぶ．また，積分範囲は $\int_0^1\int_0^{1-r'}$ となり，複雑であった積分範囲が簡単化される．さらに，形状関数も各領域で関数の形が同一となるため，簡単化できる．これで領域が単純になり，積分等の計算が容易になる．

実際に，本研究では全体座標系 (r,z) を

$$r = (r_1 - r_3)r' + (r_2 - r_3)z' + r_3 \tag{21}$$

$$z = (z_1 - z_3)r' + (z_2 - z_3)z' + z_3 \tag{22}$$

を使って，局所座標系の (r',z') に変換した．ここで，(r_i,z_i) は節点 i の全体座標系での座標である．また，$drdz$ はヤコビアン $|\boldsymbol{J}|$ を使って，

$$drdz = |\boldsymbol{J}|dr'dz' \tag{23}$$

となる．ただし，

$$|\boldsymbol{J}| = (r_1 - r_3)(z_2 - z_3) - (z_1 - z_3)(r_2 - r_3) \tag{24}$$

である．これで，積分が以下の式のように，全体座標系から局所座標系へ変換できる．

$$\iint_D F(r,z)drdz = \int_0^1\int_0^{1-r'} F(r,z)|J|dr'dz' \tag{25}$$

さらに，この座標変換により，局所座標系では全ての要素で形状関数 ϕ の形が同一となる．形状関数の性質を考慮に入れ，局所座標系での形状関数を導く．形状関数 ϕ はある節点では 1 になり，他の節点では 0 となる．これを考慮に入れ，形状関数を考える．二次近似であるので ϕ を

$$\phi = a{r'}^2 + br'z' + c{z'}^2 + dr' + ez' + f \tag{26}$$

と置き，各節点の座標と形状関数の値を代入する．これにより，6 個の方程式が立つ．これを連立させて解くと，a から f までの係数が分かる．係数を式 (26) に代入すると，ϕ_1 は

$$\phi_1 = 2{r'}^2 - r' = r'(2r' - 1) \tag{27}$$

となる．これを各形状関数について行うと，

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= r'(2r' - 1)\\
\phi_2 &= z'(2z' - 1)\\
\phi_3 &= 2{r'}^2 + 4r'z' + 2{z'}^2 - 3r' - 3z' + 1\\
\phi_4 &= 4r'z'\\
\phi_5 &= -4z'(r' + z' - 1)\\
\phi_6 &= -4r'(r' + z' - 1)
\end{aligned} \tag{28}$$

となる．座標変換による偏微分演算子の変換は，式 (21)，式 (22) より，

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{z_2 - z_3}{|\boldsymbol{J}|}\frac{\partial}{\partial r'} - \frac{z_1 - z_3}{|\boldsymbol{J}|}\frac{\partial}{\partial z'} \tag{29}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{r_2 - r_3}{|\boldsymbol{J}|}\frac{\partial}{\partial r'} + \frac{r_1 - r_3}{|\boldsymbol{J}|}\frac{\partial}{\partial z'} \tag{30}$$

である．ここで，関数 $F(r,z)$ は式 (28)，式 (29)，式 (30) により，r' と z' を変数とする関数 $G(r',z')$ になり，式 (25) は

$$\iint_D F(r,z)drdz = \int_0^1 \int_0^{1-r'} G(r',z')|J|dr'dz' \quad (31)$$

となる．

これらの座標変換を使うことにより，式 (19)，式 (20) の積分の計算が容易にできるようになる．実際のコードを作成するときに，これは大きなメリットである．

2.7　磁場の計算

前節では，有限要素法によるベクトルポテンシャル A の計算方法を示した．最後に，ベクトルポテンシャルから磁場の計算方法を示す．ベクトルポテンシャルから磁場は式 (7) を使って，

$$H_r = -\frac{\partial A}{\partial z} \quad (32)$$

$$H_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA) \quad (33)$$

となる．ここで，ベクトルポテンシャル A は一つの要素内では，式 (10) の決定方程式を用いて表すことができる．式 (10) を式 (32) と式 (33) に代入すると，

$$H_r = -\sum_{i=1}^{6} A_i \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \quad (34)$$

$$H_z = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{6} A_i\phi_i + \sum_{i=1}^{6} A_i \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \quad (35)$$

が得られる．従って，これらの式を用いることにより，磁場を求めることができる．

3　数値計算

3.1　コードの概要

本研究では，先に示した離散化の式 (19) と式 (20) に基づいた有限要素法による静磁場解析コードを作成した．作成したコードでは以下の処理により，磁場を計算している．

1. メッシュジェネレータ [3] により，計算領域を三角形に分割し，三角形要素と節点のデータを出力する．
2. 分割された三角形要素と節点のデータを読み込む．
3. 読み込んだデータより，磁場の連立方程式を求める．
4. 連立方程式を反復法 (SOR 法) で解き，ベクトルポテンシャルを計算する．
5. ベクトルポテンシャルの回転を計算し，磁場を求める．
6. 求めた結果をポストスクリプト形式や，ビットマップ形式で出力する．

3.2　POISSON との比較

作成したコードの計算精度を検証する必要がある．しかし，本研究の静磁場問題で適当な解析解を持つモデルがない．そこで，静磁場解析コードである POISSON と比較した [4]．比較を容易にするために，図 5 のような単純なモデルを用いた．

電流が流れる場所は図の正方形の部分で，磁性体はそれを囲んでいる下に向いているコの字の部分とした．z 軸はディレクレ条件となる．磁性体の比透磁率を 5000，その他の比透磁率を 1.0，電流密度を 1.0 と条件を設定した．

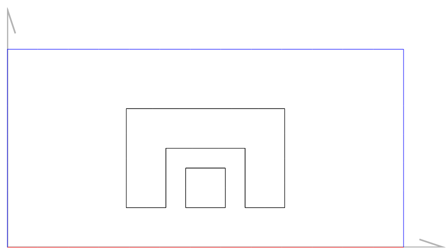

図 5: 計算領域

この領域に対してメッシュ分割を行うと，図 6 のようになる．ここではメッシュが分割されていることを目視できるように，実際よりも分割を粗くしている．実際

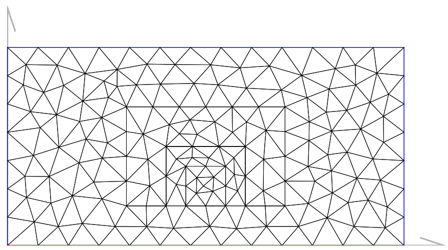

図 6: メッシュ作成

の計算では，計算領域は z が 10.0，r が 5.0 とし，メッシュジェネレータにより，全体で三角形要素数が 4218，節点数が 8587 に分割した．

図 7 に計算結果を示す．透磁率が高いため，磁力線が閉じこめられている．また，電流が流れている部分でベクトルポテンシャルが大きく，外側に向かって段々と小さくなっている．

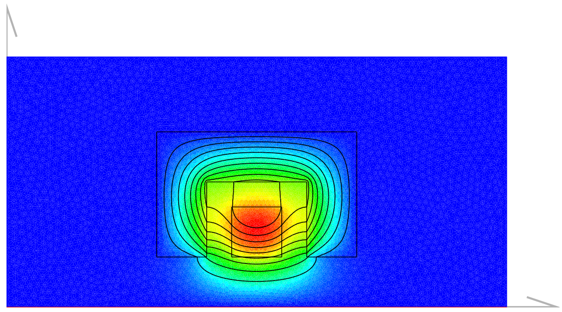

図 7: 計算結果

このように，作成したコードの計算結果が出力されたので，r=0.5 のラインについて，POISSON と比較を行った．図 8 に r=0.5 のラインの z 方向の磁束密度 Bz，r 方向の磁束密度 Br を POISSON の結果とともに示す．

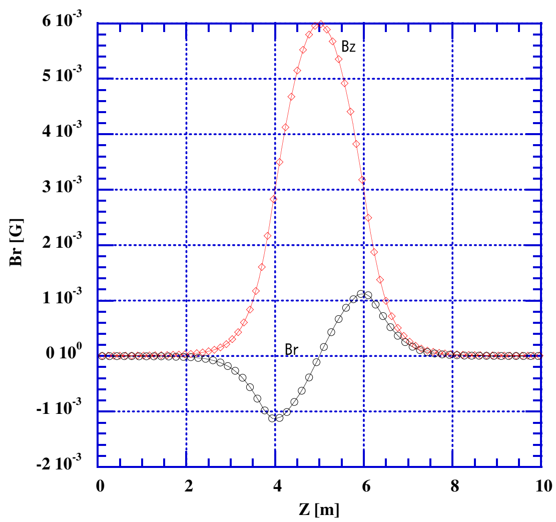

図 8: POISSON との比較結果 (r=0.5)

ここで，実線が POISSON，丸とひし形が本研究でのコードの計算結果である．図から，POISSON と本研究で作成したコードの計算結果が，よく一致していることがわかる．このことから，二次要素を用いて導いた離散化式と，作成したコードは正しいと考えている．

もう少し詳しく差を調べるために，POISSON との差を定量的に評価した．POISSON との差を

$$\delta B_z = \frac{|B_{z(P)} - B_{z(W)}|}{B_{z(P)}} \tag{36}$$

$$\delta B_r = \frac{|B_{r(P)} - B_{r(W)}|}{B_{r(P)}} \tag{37}$$

と定義する．ここで，$B_{z(P)}$，$B_{r(P)}$ は POISSON の結果で，$B_{z(W)}$，$B_{r(W)}$ は本研究でのコードで得られた値である．

POISSON との差を表す式 (36)，式 (37) を評価すると，図 9，図 10 のようになる．これらの図から読みとれるように，両端では差が大きい．また，r 方向の磁束密度については z が 5.0 のときにも差が大きい．これらの部分では磁束密度が非常に小さいため，差があると，その割合が大きくなるからである．実質的な差は約 2% である．この原因は現段階では不明であるが，今後，その原因を調べる必要があると考えている．

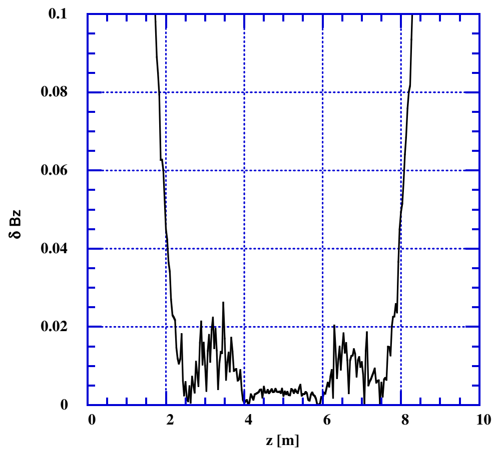

図 9: POISSON との Bz の差

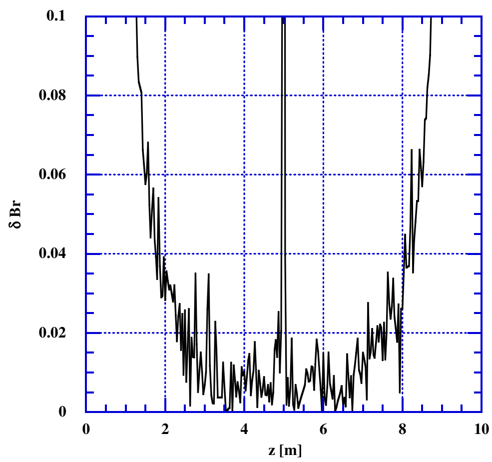

図 10: POISSON との Br の差

4　考察

本研究では，二次要素を用いた有限要素法による軸対称静磁場 (二次元問題) の解析コードを作成した．作成したコードの計算結果と POISSON の結果とを比較した結果，次のことが分かった．

- コードと POISSON とで z 軸近くの磁束密度を比較した結果，r 方向，z 方向ともに磁束密度の概形が，よく一致していた．
- コードと POISSON とで，磁束密度の差を定量的に評価した結果，磁束密度は r 方向，z 方向ともに 2% の差であった．

磁束密度の概形が，よく一致していることから，二次要素を用いて導いた離散化式と，作成したコードは正しいと考えている．一方，作成したコードと POISSON とで，磁束密度の差があるが，現段階では原因が不明である．これについては，早急に調査する必要があると考えている．

5　結言

本研究の目的は，加速器の設計に使う高精度の静磁場解析コードを作成することである．そのため，三角形要素の二次要素を用いた有限要素法の開発に着手した．まず初めに，軸対称構造の静磁場解析のための離散化した式を導いた．そして，それを基に計算コードを作成した．

作成したコードの妥当性を検証するため，その結果をロスアラモス国立研究所で開発された二次元静磁場解析コードの POISSON と比較した．その結果，POISSON との磁束密度の概形が，よく一致していることが分かった。これより，二次要素を用いて導きだした離散化式と，作成したコードは正しいと考えている．また，POISSON との磁束密度の差を定量的に評価した結果，r 方向，z 方向ともに差が 2% であることが分かった．現段階では差の原因が不明である．これについては，早急に原因を追及する必要があるだろう．

今後の課題としては，計算精度の詳細な検証を行うことが必要である．次に，現在は三角形要素を直線要素で近似しているので，計算領域が曲面の場合，誤差が大きい．これを改善するために，曲線要素を用いた領域分割が必要である．また，強磁性体ではヒステリシスが存在し，それも取り扱いたい．これらを考慮に入れ，実際の静磁場解析に利用できるようにすべきと考えている．

謝辞

本研究を遂行するにあたり，多大なる御指導，御鞭撻を頂きました指導教員の山本昌志先生に深く感謝の意を表します．また，副指導教員の浅野清光先生，田中将樹先生には数多くの御助言，御指摘を頂き，ここに深く感謝の意を表します．

参考文献

[1] J.H.Billen, et al., ”POISSON/SUPERFISH on PC Compatibles”, Proc. of the 1993 Particle Accelerator Conf., Vol. 2.

[2] 山本昌志, ”Yamamoto’s Laboratory”, <http://akita-nct.jp/~yamamoto/>, 2005 年 9 月

[3] 谷口建男, ”FEM のための要素自動分割”, 森北出版株式会社, 2002.

[4] S. Miyata, et al., ”MAGNETIC FIELD ANALYSIS BY USING 2ND-ORDER ELEMENTS”, Proc. of the 30th Linear Accelerator Meeting in Japan, Tosu, July 20-22, 2005, pp507-509