高周波電磁場解析のための２次要素を使った有限要素法の研究

夏井　拓也 [1]

A research on the FEM using second-order elemnts for high frequency electromagnetic field analysis

Takuya NATSUI [1]

Abstract

Designing the accelerating cavity, we need to know its field distribution and resonant frequencies. For this purpose, we have developed a code to analyze the high frequency electromagnetic field in resonant cavities. Accelerating cavities are generally cylindrical symmetry, so that we have developed the code which can calculate fields of the cavities via a 2D finite element method (FEM). The developed code is very accurate, since we used second-order and curve elements. In this thesis, we will explain how to calculate the field in resonant cavities. And we compared the calculation result with the theoretical estimate. As a result, we can offer the fact that our accuracy is 2×10^{-10}. Also, the code can calculate a travering wave mode with periodic boundary conditions.

key words: high frequency electromagnetic field, FEM, accelerater, second-order elements

1　序論

加速器は複雑なシステムで様々なシミュレーションコードを用いて設計を行う．例えば，電子銃のビーム軌道計算，電磁石の磁場計算，加速空洞の高周波電磁場計算などがある．シミュレーションコードの精度は，加速器の性能に影響をおよぼし，その向上は重要な課題となっている．本研究では，図 1 のような軸対称加速空洞を設計するための従来より高精度が得られる計算コードの開発を行った．

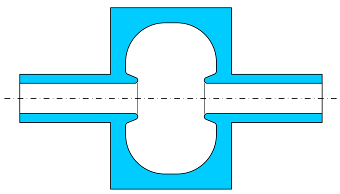

図 1: 共振空洞の例 (KEK の PF の空洞)

加速空洞は共振状態の電磁場を貯め，その電場によって荷電粒子を加速する装置であればどのような構造である．そのため，加速空洞の設計では，共振周波数および電磁場分布を精度良く求めなくてはならない．とくに，共振周波数は高い精度が要求される．なぜならば，空洞の Q 値は 10^4〜10^5 なので，10^{-6} 程度の周波数の計算精度が必要となってくる．３次元問題でこの程度の精度を得ることは困難であるが，幸い，多くの加速空洞は軸対称構造なので２次元問題として取り扱うことができる．２次元問題であれば，10^{-6} 以上の計算精度を得ることも可能にである．

しかし，従来よく使われている SUPERFISH[1] では 10^{-5} 10^{-6} 程度の精度が限界であり，２桁程度の精度の向上が望まれている．この程度の精度が限界である理由は，領域を解析するための要素に三角形１次要素を使っているためと考えられる．また，２次要素を使ってより高精度のコードも，Naleson[2] や岩下 [3] らにより開発されてきたが，一般的に使用可能な状況にはない．そこで我々は，誰もが使えるコードを目指し新たに高精度なコードの開発に着手した．

本研究では解析の精度を上げるため三角形２次要素を用いた．これにより，電磁場は要素内で２次の項まで表現でき，１次近似である１次要素に比べに精度は高くなる．また，直線で囲まれた三角形要素を用いると，境界が曲線のときに形状誤差が計算精度を落とす原因になる．これを防ぐため，曲線境界では曲線２次要素を用いるような離散化の式を導き，計算コードを作成した．

[1]生産システム工学

有限要素法の解析では，解析領域を要素分割するメッシュ生成プログラムも必要になる．本研究では，三角形２次要素と曲線２次要素に対応したメッシュ生成を行うメッシュジェネレータを作成した．これにより，どのような２次元形状も要素分割できるようになり，任意形状の軸対称空洞の解析が可能になった．

作成した計算コードの精度検証の結果，2×10^{-10} の精度が得らることを確認し，目標は達成された．

2　計算原理

2.1　ヘルムホルツ方程式の汎関数

共振空洞内は金属で囲まれた真空の空間となっており，その共振モードを解析する場合，内部には電荷も電流もない条件で計算する．この電磁場は，マクスウェルの方程式の電荷密度 $\rho = 0$, 電流密度 $\boldsymbol{j} = 0$ の場合で，ヘルムホルツ方程式

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \boldsymbol{H} \tag{1}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \boldsymbol{E} \tag{2}$$

を満足する．ここで，$\boldsymbol{H}$ は磁場，$\boldsymbol{E}$ は電場，ω は共振周波数，c は光速である．これらの微分方程式を金属の境界条件

$$\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \qquad \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} = 0 \tag{3}$$

のもと解けば加速空洞内の電磁場が求まる．ここで，$\boldsymbol{n}$ は境界の法線ベクトルである．

(3) 式の境界条件のもと，(1) 式や (2) 式の微分方程式を解くと電磁場分布が求められる．ここでは，同等なことを変分法を用いる有限要素法で計算することにする．変分法を使う場合は，解くべき問題の汎関数を設定しなくてはならない．共振空洞の電磁場分布を求めるために，(1) 式と (2) 式のうちどちらを解いてもよい．しかし，後で述べるがここで問題とする TM_0 モードでは，磁場に関する式を解く方が計算がしやすいので (1) 式に関する変分問題を解くこととする．

ここで，磁場に関するヘルムホルツ方程式，式 (1) の汎関数は，

$$J[\boldsymbol{H}] = \int \left[(\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}^*) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}^* \right] dV \tag{4}$$

である [4]．ここで，アスタリスク $*$ は複素共役を表す．

通常の加速空洞では定在波の TM_0 モードが運転に使われる．定在波の場合，磁場は実数として取り扱えるので $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^*$ となる．さらに，空洞の形状は完全軸対称なので，円柱座標系を使う．すると解析すべき TM_0 モードは，電場は E_r, E_z，磁場は H_θ のみで，それらは，座標 (r, z) の関数である．磁場が満たす式はスカラー式となり，電場の式に比べて簡単になる．軸対称空洞の TM_0 モードの電磁場の汎関数は (4) 式を円柱座標系で表すと，

$$\begin{aligned} J[H_\theta] = \iint_D \Bigg[& \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial r}\right)^2 + 2\frac{H_\theta}{r}\frac{\partial H_\theta}{\partial r} \\ & + \left(\frac{H_\theta}{r}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 H_\theta^2 \Bigg] 2\pi r dr dz \end{aligned} \tag{5}$$

となる．この汎関数の停留値を求めること，すなわち $\delta J[H_\theta(r, z)] = 0$ となる H_θ を求めることが課題となる．H_θ が空洞内の磁場を表し，式 (5) が解析すべき方程式となる．

2.2　メッシュ分割と区分多項式を使った離散化

汎関数式 (5) が停留値をもつ H_θ を求めることに問題が帰着したが，このままの形ではコンピュータで直接計算することはできない．なぜなら，式 (5) は形状が複雑なため積分不可能で，その停留値も数値計算できないからである．そこで，汎関数を離散化した式を導き，コンピュータで計算できる形にする．

ここで，式 (5) のように求めた汎関数を

$$\begin{aligned} J[u] = \iint_D \Bigg[& \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + 2\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \\ & + \left(\frac{u}{r}\right)^2 - \lambda u^2 \Bigg] r dr dz \end{aligned} \tag{6}$$

と書き直す．ここで，$\lambda = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$，$u = H_\theta$ である．u を求めることが磁場分布を求めることに対応し，固有値 λ を求めることが共振周波数を求めることに対応する．

有限要素法では，区分多項式を使い関数 $u(r, z)$ を近似する．この区分多項式を用いるために解析領域 (汎関数の積分領域) を三角形要素に分割する [5]．その分割の例を図２に示す．これは，４分の１の円を要素分割した例である． この図の各三角形を要素といい，有限要素法ではその内部を多項式で近似する．図２の要素の１つを取り出したものが図３で，この内部の磁場 u を

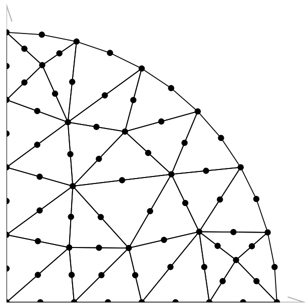

図 2: 要素分割と節点

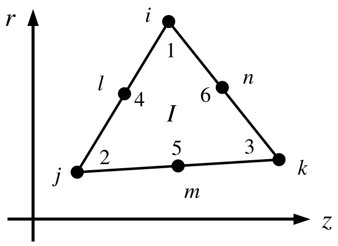

図 3: 三角形２次要素と節点

多項式で近似するのである．隣接する三角形同士では，磁場 u は連続になるように多項式を決める．

本研究では，計算精度を高めるために２次要素を使用した．２次要素では６つの節点を用いて多項式を表現する．要素分割するときには，要素には通し番号をつけ，同じように節点にも通し番号をつける．例えば，図３の要素は，要素番号 I で節点 i, j, k, l, m, n を持っている．また，要素の中では，節点の局所番号として１から６までの番号もつける．例えば，今の場合，要素 I の２つ目の節点は，節点 j である．局所番号１から３までの節点は三角形の頂点に，４から６までの節点は三角形の辺の中点に位置している．

要素の中の関数 $u(r,z)$ を２次関数で近似するのが２次要素である．この場合，要素 I の中の u の形は，

$$\begin{aligned}u_I(r,z) =& u_{I1}g_{I1}(r,z) + u_{I2}g_{I2}(r,z) + u_{I3}g_{I3}(r,z) \\ &+ u_{I4}g_{I4}(r,z) + u_{I5}g_{I5}(r,z) + u_{I6}g_{I6}(r,z)\end{aligned} \tag{7}$$

となる．添え字 It は要素 I の局所節点 t という意味である．$g_{It}(r,z)$ は要素 I の局所節点 t の座標で１となり，ほかの節点の座標では０となるような r, z に関する２次関数である．また，要素 I の領域以外では $g_{It} = 0$ となる．この $g(r,z)$ は形状関数と呼ばれる．このようにすると，節点 i の座標では，$u = u_i$ となる．なお，$g(r,z)$ の具体的な式は後で示す．

また，領域全体での $u(r,z)$ は，要素の数を N とすると，要素１から N までの関数の和として表され，

$$\begin{aligned}u(r,z) &= \sum_{I=1}^{N} u_I(r,z) \\ &= \sum_{I=1}^{N} [u_{I1}g_{I1}(r,z) + u_{I2}g_{I2}(r,z) + u_{I3}g_{I3}(r,z) \\ &\quad + u_{I4}g_{I4}(r,z) + u_{I5}g_{I5}(r,z) + u_{I6}g_{I6}(r,z)]\end{aligned} \tag{8}$$

となる．つまり，関数 $u(r,z)$ の形は，u_1 から u_n までの定数を決めることで決定する (n は節点数)．

このように関数 $u(r,z)$ の形を決め，式 (6) に代入すると右辺の値は，u_1 から u_n の値によって決定し，汎関数 $J[u]$ は多変数関数 $J(u_1, \cdots, u_n)$ となる．問題は変分問題から多変数関数 $J(u_1, \cdots, u_n)$ の極値問題に置き換わった．

このように，変分問題を要素分割し区分多項式を使い極値問題に置き換え，近似的に変分問題を解く方法が有限要素法である．

2.3 離散化式

関数 $J(u_1, \cdots, u_n)$ が極値をとる条件は，

$$\frac{\partial J}{\partial u_1} = 0\ ,\ \frac{\partial J}{\partial u_2} = 0\ , \cdots ,\ \frac{\partial J}{\partial u_n} = 0$$

である．これらを計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial u_i} &= \frac{\partial}{\partial u_i}\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + 2\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{u}{r}\right)^2 - \lambda u^2\right] rdrdz \\ &= \frac{\partial}{\partial u_i}\sum_{I=1}^{N}\iint_{(I)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + 2\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{u}{r}\right)^2 - \lambda u^2\right] rdrdz\end{aligned} \tag{9}$$

となる．ここで，(I) は要素 I の領域という意味である．変数として u_i が含まれている領域は，要素が節点 i を持っている領域である．従って，偏微分式が値を持つのは非常に少ない領域だけである．今，節点 i を持つ要素

が要素 I, L, K とすると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \iint_{(I)} \Bigg[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + 2\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \\
+ \left(\frac{u}{r}\right)^2 - \lambda u^2 \Bigg] r dr dz \\
+ \frac{\partial}{\partial u_i} \iint_{(L)} \cdots dr dz + \frac{\partial}{\partial u_i} \iint_{(K)} \cdots dr dz
\end{aligned}
\tag{10}
$$

となる．このように考えると，少し複雑なので要素 I の寄与分だけをまず考えることとする．この場合，$\frac{\partial J}{\partial u_i}$ の要素 I の寄与分は，

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial J}{\partial u_i}\right|_{(I)} = \frac{\partial}{\partial u_i} \iint_{(I)} \Bigg[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + 2\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \\
+ \left(\frac{u}{r}\right)^2 - \lambda u^2 \Bigg] r dr dz
\end{aligned}
\tag{11}
$$

となる．ただし，$|_{(I)}$ は要素 I の寄与分を示す．u_i は要素 I が持っている節点なので，u_i を局所節点番号で表したものを u_{Ip} とする (p は 1 から 6 のいずれか)．今は領域 I しか考えていないので u_{I1} などは u_1 に，同様に g_{I1} などは g_1 と表記する．従って，領域 I での u の式は，

$$
\begin{aligned}
u =& u_1 g_1 + u_2 g_2 + u_3 g_3 + u_4 g_4 + u_5 g_5 + u_6 g_6 \\
=& \sum_{t=1}^{6} u_t g_t
\end{aligned}
\tag{12}
$$

となる．また，式 (11) に式 (12) を代入する．従って，

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial J}{\partial u_p}\right|_{(I)} =& 2 \iint_{(I)} \sum_{t=1}^{6} \left(u_t \frac{\partial g_t}{\partial r} \right) \frac{\partial g_p}{\partial r} r dr dz \\
&+ 2 \iint_{(I)} \sum_{t=1}^{6} \left(u_t \frac{\partial g_t}{\partial z} \right) \frac{\partial g_p}{\partial z} r dr dz \\
&+ 2 \iint_{(I)} \left[g_p \sum_{t=1}^{6} \left(u_t \frac{\partial g_t}{\partial r} \right) + \sum_{t=1}^{6} (u_t g_t) \frac{\partial g_p}{\partial r} \right] dr dz \\
&+ 2 \iint_{(I)} g_p \frac{\sum_{t=1}^{6} u_t g_t}{r} dr dz \\
&- \lambda 2 \iint_{(I)} \sum_{t=1}^{6} (u_t g_t) g_p r dr dz
\end{aligned}
\tag{13}
$$

となる．この式は，$u_1, \cdots, u_6$ に関する 1 次式である．この式を $u_1, \cdots, u_6$ の項でまとめ整理すると

$$
\left.\frac{\partial J}{\partial u_p}\right|_{(I)} = \sum_{t=1}^{6} a_{pt} u_t - \lambda \sum_{t=1}^{6} b_{pt} u_t
\tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{ただし}\quad a_{pt} =& \iint_{(I)} \Big(\frac{\partial g_p}{\partial r}\frac{\partial g_t}{\partial r} r + \frac{\partial g_p}{\partial z}\frac{\partial g_t}{\partial z} r \\
&+ g_p \frac{\partial g_t}{\partial r} + \frac{\partial g_p}{\partial r} g_t + \frac{g_p g_t}{r} \Big) dr dz \\
b_{pt} =& 2 \iint_{(I)} g_p g_t r dr dz
\end{aligned}
$$

となる．

ここでは，特定の三角形要素について考えたが，すべての要素についても同様できる．従って，節点 p を含む領域で，$\frac{\partial J}{\partial u_p} = 0$ ということを考慮すると連立方程式ができる．

式 (14) から連立方程式は一般化固有値問題

$$
\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{M}\boldsymbol{u} \quad \text{ただし}\ \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}
\tag{15}
$$

に帰着する．この行列 $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{M}$ の要素を決めなければならない．

(14) 式は，行列 $\boldsymbol{KM}$ の i 行目に当たる．ただし，i は今考えている要素 I の局所節点番号 p に当たる要素番号である．また，要素 I の局所節点番号 t の節点番号を j とすると，要素 I の寄与分について，行列 $\boldsymbol{KM}$ の要素の値がわかる．これらを書き出すと，

$$
\begin{aligned}
k_{ij}|_{(I)} =& 2 \iint_{(I)} \Big(\frac{\partial g_p}{\partial r}\frac{\partial g_t}{\partial r} r + \frac{\partial g_p}{\partial z}\frac{\partial g_t}{\partial z} r \\
&+ g_p \frac{\partial g_t}{\partial r} + \frac{\partial g_p}{\partial r} g_t + \frac{g_p g_t}{r} \Big) dr dz
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
m_{ij}|_{(I)} = 2 \iint_{(I)} g_p g_t r dr dz
\tag{17}
$$

となる．

このように，各要素ごとに行列への寄与分を計算し，すべての要素について和をとれば解くべき固有値問題の行列を作ることができる [6].

2.4 曲線要素

解析対象の領域が曲線の境界を含んでいる場合，直線から構成される三角形要素だけを使った場合に領域の形状を精度よく近似できず，計算精度が向上しにくい．そこで，曲線の境界に接している要素には図 4 のよう

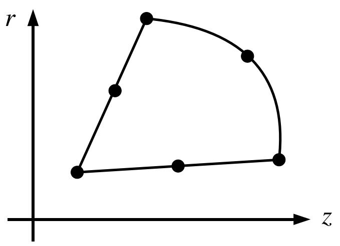

図 4: 曲線要素と節点

な曲線要素を用い，形状を精度よく近似する．曲線要素は三角形要素の一辺を曲線で置き換えた形をしている．この曲線部分で境界を近似していく．

曲線要素は，普通の三角形２次要素を座標変換した形になっている．従って，曲線要素も座標変換して三角形２次要素と同じ形にすれば，三角形要素と同様に扱える．

3　進行波への応用

前章までは共振空洞の定在波を計算する方法について説明した．この定在波の計算を応用すると進行波を計算できる．本研究では進行波のための計算コードの開発にも成功した．この進行波の計算原理は文献 [3] に詳しく載っている．

定在波を計算する場合は磁場を実数として取り扱ったが，進行波では磁場を複素数として取り扱う．さらに，計算領域の左右に周期的境界条件を取り入れることで進行波が計算できる．

定在波を解く場合の固有値問題の式は，

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{M}\boldsymbol{x} \tag{18}$$

ある．この式を少し詳しく書くと，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{\ell\ell} & \boldsymbol{K}_{\ell i} & 0 \\ \boldsymbol{K}_{i\ell} & \boldsymbol{K}_{ii} & \boldsymbol{K}_{ir} \\ 0 & \boldsymbol{K}_{ri} & \boldsymbol{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_\ell \\ \boldsymbol{x}_i \\ \boldsymbol{x}_r \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{\ell\ell} & \boldsymbol{M}_{\ell i} & 0 \\ \boldsymbol{M}_{i\ell} & \boldsymbol{M}_{ii} & \boldsymbol{M}_{ir} \\ 0 & \boldsymbol{M}_{ri} & \boldsymbol{M}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_\ell \\ \boldsymbol{x}_i \\ \boldsymbol{x}_r \end{bmatrix} \tag{19}$$

ここで，添え字 ℓ は left，i は inner，r は right の略である．

また，x が複素数の場合の固有値問題を解く場合には，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{Re} \\ \boldsymbol{x}^{Im} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{Re} \\ \boldsymbol{x}^{Im} \end{bmatrix} \tag{20}$$

として，解く．ここで，$\boldsymbol{x}^{Re}$ は x の実数部，$\boldsymbol{x}^{Im}$ は虚数部である．

また周期的境界条件を考慮すると，左右での位相差が ϕ のとき

$$x_r = e^{i\phi} x_\ell \tag{21}$$

となる．この条件を付加して (20) 式を解く．

したがって，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}' \tag{22}$$

ただし，

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\cos\phi} & \mathbf{0} & \boldsymbol{-\sin\phi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\sin\phi} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\cos\phi} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_\ell^{Re} \\ \boldsymbol{x}_i^{Re} \\ \boldsymbol{x}_r^{Re} \\ \boldsymbol{x}_\ell^{Im} \\ \boldsymbol{x}_i^{Im} \\ \boldsymbol{x}_r^{Im} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_\ell^{Re} \\ \boldsymbol{x}_i^{Re} \\ \boldsymbol{x}_\ell^{Im} \\ \boldsymbol{x}_i^{Im} \end{bmatrix} \tag{23}$$

として，$\boldsymbol{P}$ の転置 $\boldsymbol{P}^t$ を左から (20) 式にかけると，

$$\boldsymbol{P}^t \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}' = \lambda \boldsymbol{P}^t \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}' \tag{24}$$

となる．最終的に (24) 式を解くことで進行波が求められる．

4　結果

4.1　計算の順序

本研究では，前節で導いた式 (16)(17) に基づいた有限要素法をによる軸対称加速空洞の共振周波数および共振モード の電磁場分布を計算できるコード を作成した．特に，本研究の特徴は，有限要素法で使う要素に三角形２次要素と曲線２次要素を用いた，という点にある．

また，解析領域を設定すると，自動的に要素分割を行うメッシュジェネレータも作成した [5]．このメッシュジェネレータはデローニー三角形分割を任意の２次元形状について行うことができる．そしてメッシュジェネレータにより，曲線２次要素に対応したメッシュデータが出力される．

実際の計算の順序を以下に示す．

1. メッシュジェネレータにより解析領域を要素分割する
2. メッシュデータを読み込む
3. 一般化固有値問題の行列の値を決定する
4. 共役勾配法で一般化固有値問題を解く
5. 固有値と固有ベクトルから共振周波数と磁場分布を得る
6. 磁場分布から電場分布を計算する
7. 計算結果を出力する
8. 計算結果よりポストプロセッサを使い結果をグラフィックス表示する

このような手順で軸対称加速空洞の解析ができるようになった．

4.2　計算結果

作成した計算コードにより任意の形の共振空洞を解析できる．その例として，図 5 に高エネルギー加速器研究機構の PF の空洞 [7] を解析した結果を示す．図 5 は磁場の強さを色で表示し，電気力線を黒い線で表し，磁場の強さは色で表している．磁場は，円柱座標形で θ 方向の成分しか持たないので，このように表示できる．

この空洞の測定された共振周波数は，499.5MHz であった．それに対して本研究で作成されたコードにより計算された共振周波数は，499.557MHz であった．計算精度については次節で詳細に述べる．

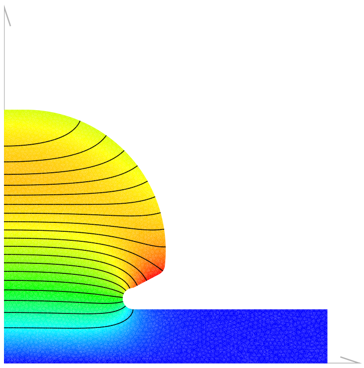

図 5: PF の空洞の計算結果

また，進行波を計算した結果の例を図 (6) に示す．図 (6) はリニアック加速管の一つのセルを計算した結果である．

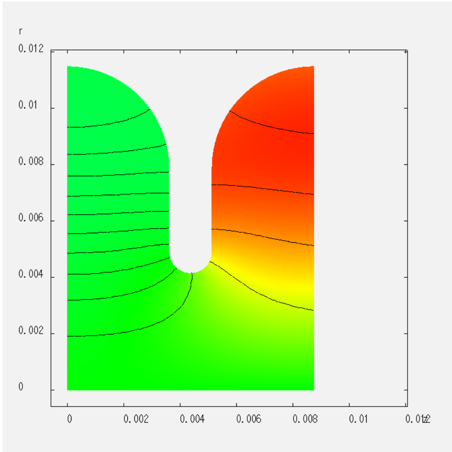

図 6: 進行波の計算結果

表 1: SUPERFISH との比較． Q 値，R:シャントインピーダンス，K:ロスパラメータ

		作成コード	SUPERFISH
Q_0		7775.0	7715.3
R	[MΩ/m]	99.272	98.422
K	[V/pC]	2.0038	2.0025

4.3　精度検証

作成したコードの計算精度を調べるために，すでに解析解が分かっている単純な球形空洞の共振周波数を計算した．

具体的には，半径 1m の球形空洞の固有値を計算した．球形を解析する際は対称性より図 2 のような 4 分の 1 の円領域を解析すればよい．この形は，境界が曲線になっているところもあり，今回の場合の精度検証には適している．

半径 1m の球形空洞の固有値の解析解は，$(\omega/c)^2 = 7.527929582$ である．この値とコードの計算結果を比較した．精度検証に用いた球形空洞の解析結果を図 7,8 に示す．図 7 は磁場の強さを色で表示し，電気力線を黒い線で表している．図 8 は，電場の強さと方向を矢印で表したものである．

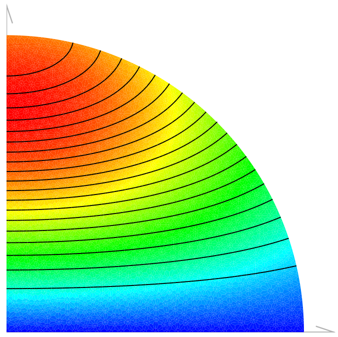

図 7: 磁場の強さと電気力線

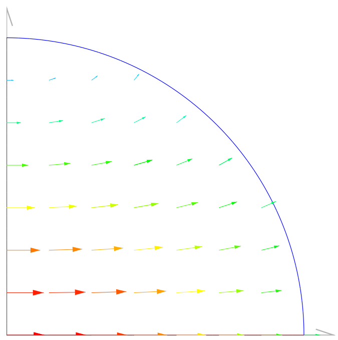

図 8: 電場のベクトル表示

ここでの，誤差を表す δ は

$$\delta = \left| \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} \right| \tag{25}$$

λ : 計算値　　λ_0 : 解析値

とした．また，加速器設計に用いられることが多い電磁場解析コードの SUPERFISH の誤差も調べ，比較した．

本研究で開発してコードと SUPERFISH の誤差を図 9 に示す．ここで，メッシュサイズとは三角形要素の一辺の長さである．図からわかるように SUPERFISH は平均メッシュサイズの 2 乗で誤差が減少しているが，作成したコードは 4 乗で誤差が減少している．つまり，メッシュ面積で考えると SUPERFISH は 1 乗で，作成したコードは 2 乗で誤差が減少している．このことから，計算コードは意図したとおりに動作していると推測している．

ただ，メッシュサイズが 0.013m より小さくなったあたりで，それまで直線的に変化してきた誤差の値が傾向

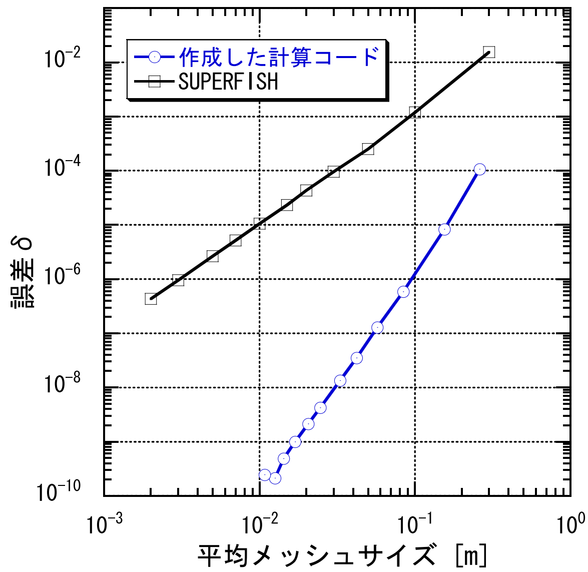

図 9: 計算結果の誤差のグラフ

が変化している．つまり，作成したコードでは 2×10^{-10} 程度が誤差の限界である．この限界がなにに起因しているのかは不明である．本研究をはじめるにあたり，目標とした 10^{-6} よりも十分良い精度が得られていることが分かる．このことから加速器の設計に十分使えるコードと考えている．

計算時間は，もっとも計算精度が高かった 0.014m のメッシュサイズで，200sec ほどだった．ここで，CPU は Pentium4 の 2.8GHz を使用した．

5　考察

本研究では 2 次要素を使用した有限要素法コードを作成した．その結果，解の収束の速さについて次のことが分かった．

- 1 次要素ではメッシュサイズ（面積）の 1 乗に比例して収束する

- 2 次要素ではメッシュサイズ（面積）の 2 乗に比例して収束する

これは，理論的な裏付けがあると考えられるが，まだその段階に至っていない．しかし，精度検証の結果から 2 次要素の有用性は明らかとなった．同じメッシュサイズで比較をしてみると，SUPERFISH で 2×10^{-5} の精度のとき，作成コードでは 2×10^{-10} の精度にいたってい

る．これより，実用的には十分な精度が得られていると考えている．

6　まとめと今後の課題

加速器は様々なシミュレーションを用いて設計を行うが本研究では，加速空洞を設計するための計算コードの開発を行った．加速空洞の設計では，共振周波数および電磁場分布の高い精度が要求される．とくに，共振周波数は高い精度が要求され，10^{-6} 程度の周波数の計算精度が必要となる．このため本研究では，従来よりも高い精度の計算コードを目指し開発を進めた．

10^{-6} よりも高い精度の解析を可能にするため，三角形２次要素と曲線２次要素を使った有限要素法の離散化の式を導き，それを基に計算コードを作成した．計算コードの精度を調べるため，球形空洞の共振周波数を計算し解析値と比較した．その結果，共振周波数の誤差はメッシュサイズの４乗（要素面積の２乗）に比例し，精度が 2×10^{-10} 程度であることを確認した．また，曲線要素を使っているので，複雑な形状においても精度の高い計算結果が得られるだろうと考えられる．今回は，単純な形状での精度検証にとどまったが，今後もっと複雑な形状での精度検証も必要であると考えている．

また，精度検証のところでも触れたがメッシュを細かくするとあるところでそれ以上精度が上がらなくなるところがある．この原因は不明だが，おそらく丸め誤差によるものと予想されるので計算の有効桁数を増やせばさらに精度の高い結果が得られると考えている．

このように定在波を計算できるコードを作成することができたので，それを応用して進行波の計算も可能になった．進行波は複素数を使い，左右に周期的境界条件を課すことで計算できる．

今の段階では，計算結果の表示は OpenGL を使い磁場分布，電場分布などを表示できるようになってる．また，それをビットマップ形式で保存でき，また，eps 形式で図を描くこともできるようになっている．しかし，実用的な計算コードとして使うには，まだまだインターフェイスの部分で問題があるので，今後は，GUI を充実させて使いやすいものにすべきである．

最後に，本研究で得られたの成果をまとめると以下のようになる．

- 三角形２次要素，曲線２次要素を使った有限要素法の離散化式が得られた
- 空洞共振の解析のための有限要素法を使った計算コードをしたコードには三角形２次要素および曲線２次要素を使用し，結果はグラフィックスで表示できる
- 計算コードの精度検証の結果，従来よりも非常に高い精度で計算できることが分かった．具体的な精度の値は 2×10^{-10} であった
- 複素数計算と周期的境界条件を取り入ることで定在波の計算を応用して進行波の計算も可能になった

謝辞

本研究にあたり，多大なご指導をしてくださいました指導教員の山本昌志先生には心より感謝を申し上げます．また，様々なご助言，ご指摘をいただきました副指導教員の宮田克正先生，伊藤桂一先生には深く感謝の意を表します．

参考文献

[1] K.Halbach, et al, “SUPERFISH - A Compute Program for Evaluation of RF cavities with Cylindrical Symmetry”, Particle Accelerators 7 (4), 1976

[2] E.Nelson, “A 2D Field Solver for Periodic Structures with Special Corner Elements”, 1991 IEEE Particle Accelerater Conference ,May 6-9 1991

[3] Y.Iwasita, “PISCESII:2.5D RF CAVITY CODE WITH HIGH ACCURACY”, BEAM SCIENCE AND TECNOLOGY Vol.7, February 2002

[4] 小柴正則, “光・波動のための有限要素法の基礎”, 森北出版株式会社, 2002

[5] 谷口健男, “FEM のための要素自動分割”, 森北出版株式会社, 2002

[6] T. Natsui et al, “DEVELOPMENT OF A CODE FOR ANALYZING RESONANT MODES” Proc. of the 30th linear accelarator meeting in japan, July 2005, Tosu Japan

[7] Y. Yamazaki et al, “MEASURMENT OF THE LONGITUDINAL AND TRANSVARSECOUPLING IMPEADANCES OF THE HIDER-ORDER MODES OF THE RE-ENTRANT ACCELERATING CAVITY”, KEK 80