

博士論文

リニアック加速管の
長距離ウェーク場の研究

総合研究大学院大学数物科学研究科
加速器科学専攻

山本昌志

平成6年

現住所 〒135 東京都江東区豊洲 3-1-15
石川島播磨重工業株式会社 メカトロ総合開発センター 高エネルギー技術部
電子メールアドレス m_ymoto@ihimsys.ihl.co.jp

要旨

素粒子物理学は、理論と実験が互いに密接な関係を保ちながら、各々の進歩に従い新たな発見を行ってきた。素粒子物理学の更なる発展には、今後も理論と実験の両者の進歩は必要不可欠であろう。したがって、素粒子物理学の関心がより質量の大きい粒子になるに従い、より高エネルギーの加速器が必要となってくる。しかし、現在、素粒子実験に盛んに用いられている電子・陽電子蓄積リングの高エネルギー化は、荷電粒子を曲げることにより発生するシンクロトロン放射によるエネルギー損失のために、もはや限界に達している。そこで、シンクロトロン放射の生じない加速器として、長さ 10[km] 程度の線形加速器を 2 台対向させ、両側から電子・陽電子を加速し衝突させるリニアコライダーが提案されている。これは、現在蓄積リングによって達成されているよりも高いエネルギーの電子・陽電子衝突型加速器として唯一残された方法と考えられている。それ故、エネルギー開拓領域での素粒子実験を目指す各国の研究所では、リニアコライダー建設の計画があり、それを実現するための研究が行われている。日本のリニアコライダーの計画は Japan Linear Collider(JLC) と呼ばれ、高エネルギー物理学研究所(KEK)が中心となり、その物理や加速器の研究を盛んに行っている。

素粒子実験に用いる加速器の性能は、エネルギーのみならずルミノシティも重要な因子である。ルミノシティはバンチの衝突回数と各々のバンチ内に含まれる粒子数の積に比例し、その断面積に反比例する。パルス運転を行うリニアコライダーは、連続運転を行う蓄積リングに比べ、衝突回数が格段に少ないためにルミノシティを上げることが困難である。リニアコライダーでは、この困難をビームの断面積を小さくすることで対処しようとしている。そのためには、衝突点で大電流・小エミッタンスビームが必要である。

エネルギー効率を上げるために、JLC の主線形加速器の運転周波数は、従来使用されてきた S-バンド (2856[MHz]) の丁度 4 倍の周波数である X-バンド (11.424[GHz]) が予定されている。運転周波数を高くするとエネルギー効率が良くなる反面、ビームを縦・横方向にキックするウェーク場が増大する弊害が生じる。例えば、同じ構造(相似形)で同じ長さの加速管の場合、縦方向ウェーク場の大きさは周波数の 2 乗に、横方向は 3 乗に比例する。

ウェーク場のうち、後続のバンチまで届くものを長距離ウェーク場と呼ぶ。リニアコライダーで多バンチを加速する場合、前方のバンチが誘起した長距離ウェーク場により後方のバンチが横方向にキックされビームのエミッタンスが大きくなり、衝突点でのルミノシティの低下をもたらすことが深刻な問題となっている。この問題が解決されない限りリニアコライダーに X-バンドのような高い周波数の加速管は採用できない。

横方向の長距離ウェーク場の効果を抑制させるために、リニアコライダーの加速管では、

ビームの入口から出口にわたって隣り合う加速セルの形状を μm オーダーで変えている。このような加速管のウェーク場の計算は、通常のメッシュを用いたコードでは不可能である。それ故、加速管内の電磁場を計算する種々の方法が研究されている。これらのうち、 μm オーダーで形状が変化する200程度のセルから構成されるリニアコライダーの加速管の長距離ウェーク場が計算できるのは、SLACのS. A. HeifetsやS. A. Kheifetsらのフィールドマッチングの方法やDarmstadt工科大学のU. van Rienenらのモードマッチングによる計算とSLACのK. L. F. Bane, DESYのM. Drevlakまた筆者らの等価回路モデルによる計算などである。しかし、フィールドマッチングのコードは、最近になって横方向ウェーク場への発展を行ったが、キック因子の評価方法が確定しているとは言えないし、計算できる加速セルの形状はピルボックスをビームホールで連結した構造で構成されなくてはならず、実際の加速管の形状とは異なる。また、U. van Rienenのモードマッチングコードは、200セル程度の加速セルの全て形状が異なる加速管の横方向ウェーク場を計算するには至っていない。一方、等価回路モデルでは、同時に取り扱えるモードが現在は2個までであり、より高次のモードを取り扱うに至っていない。

加速セル内の電磁場は一般的に固有関数で展開可能である。R. M. Bevenseeは、それを加速セルのディスク面を磁氣的短絡面とした固有関数（オープンモード）で展開する方法を示し、特に2個のモード間に結合のある場合の周期構造の電磁場を評価できることを示した。本研究では、このオープンモード展開を更に発展させることにより、必要な加速セルのモード全てを取り入れ横方向長距離ウェーク場を取り扱うことにした。オープンモード展開では任意の形状の加速セルを取り扱うことができるので、将来、実際の加速管の設計に重要な役割を果たすと考えられる。

ところが、実際この方法を用いて比較的カップリングの大きい加速セルの電磁場を有限個のモードで展開すると、周波数が複素数となる物理的に矛盾した結果が得られる。そこで、本研究ではその矛盾が生じないような取り扱いを研究し、この矛盾を取り除く方法を確立した。この方法を用いて加速管内の電磁場を計算すると、これまで行われてきた等価回路による解析に比べ多くのモードを取り入れることができ、またモードの周波数・電磁場ともに良い計算精度が得られることがわかった。このオープンモード展開の方法により、リニアコライダーで検討されている周波数分散型加速管内のウェーク場が高い周波数のモードまで計算できるようになった。

以下に本研究の成果を本論文の各章ごとにまとめる。

- 2章 周期構造の双極モードの評価

フィールドマッチングを用いて、ディスク形状（厚さと穴径）を系統的に変化させ、加速セルの双極モードの計算を行った。この計算から、ディスクの形状に依存する双極モードの振る舞いが分かり、周波数分散構造を設計するときの指針となる基礎的データを得ることができた。

- 3章 周期構造のオープンモード展開

有限個のオープンモードで加速セル内の電場を級数展開するオープンモード展開の限界、すなわちディスク孔が大きい場合や計算するモード数が多い場合に得られる周波

数が複素数になることを示した。そして、この限界を打破する有効な方法、すなわち有限個のオープンモードで展開する場合でも固有値方程式の性質が無限個のときと同様にエルミート性を損なわない取り扱いを開発し、その有効性を示した。これにより、リニアコライダーの周波数分散構造に用いる比較的ディスク孔の大きい加速セルの高次のモードがオープンモード展開を用いて計算できるようになった。

- 4章 **非周期構造のオープンモード展開**

周期構造を解析するオープンモード展開を非周期構造へ適用する方法を示し、その固有値方程式を導いた。これを用いて、JLC の為の周波数分散構造を 8 個のオープンモードで展開し、そのウェーク関数の計算を行い、JLC の周波数分散構造の出発点となる構造を決めることができた。また、現在の設計では HEM_{16} モードのウェーク関数の減衰に難があることがわかった。

- 5章 **周波数分散構造の双極モードの測定**

オープンモード展開の有効性を確認するために、周波数分散構造のモデルを製作し、その共振モードを測定した。その結果、共振周波数はオープンモード展開の計算と良い一致を示し、有効性を確認した。

目次

1 序論	1
1.1 研究の背景	1
1.1.1 加速器の発明からリニアコライダーまで	1
1.1.2 主線形加速器におけるエミッタンス保存	4
1.1.3 Japan Linear Collider	6
1.2 ウェーク場	10
1.2.1 ウェーク場の概念	10
1.2.2 ウェーク場を記述する諸量	11
1.2.3 本論文での加速管のウェーク場を記述する方法	17
1.2.4 加速管内の長距離ウェーク場とその減衰対策	18
1.3 ウェーク場の計算	21
1.3.1 単空洞の場合	21
1.3.2 多連空洞の場合	23
1.4 等価回路モデルからオープンモード展開へ	24
1.4.1 無結合共振等価回路モデル	24
1.4.2 単一パスバンド等価回路モデル	26
1.4.3 二重パスバンド等価回路モデル	26
1.4.4 オープンモード展開	30
1.5 研究の目的・方法、及び本論文の構成	31
1.5.1 目的	31
1.5.2 方法	31
1.5.3 本論文の構成	31
2 周期構造の双極モードの評価	32
2.1 双極モード解析	32
2.1.1 計算方法	32
2.1.2 加速セル形状	33
2.2 典型的なセルの双極モード	34

2.2.1	双極モードのキック因子の分布	35
2.2.2	双極モードの分散関係	39
2.2.3	双極モードのフィールドパターン	39
2.3	双極モードのディスク形状に対する依存性	41
2.3.1	最低次の双極モード	41
2.3.2	ディスク厚を変えたときの同期モードのキック因子と周波数	44
3	周期構造のオープンモード展開	45
3.1	電磁場の方程式	45
3.2	周期構造内の電磁場の固有関数展開	48
3.2.1	基底固有関数	49
3.2.2	加速セル内の方程式	52
3.2.3	固有値問題	57
3.2.4	行列 X の性質	58
3.2.5	キック因子の計算	60
3.3	オープンモード展開の実際の計算	60
3.3.1	固有関数の計算	60
3.3.2	直接フィールドの積分から X を決める場合	61
3.3.3	エルミート行列になるように行列 X を決める場合	62
3.3.4	まとめ	72
3.4	等価回路モデルとの対応	73
3.4.1	等価回路の表す固有値方程式	73
3.4.2	等価回路とオープンモード展開との対応	75
3.4.3	まとめ	76
4	非周期構造のオープンモード展開	78
4.1	計算形状	79
4.2	非周期構造のオープンモード展開	79
4.2.1	非周期構造のオープンモード展開の基本式	80
4.2.2	フィールドマッチングによる固有関数の計算	82
4.2.3	ディスク孔部分の面積分	86
4.2.4	両端の境界条件	88
4.2.5	セル内の体積分	90
4.2.6	固有値方程式	91
4.2.7	キック因子の計算	93
4.3	21セル-ディスク孔径線形変化構造の評価	95
4.3.1	MAFIA とオープンモード展開の計算	95
4.3.2	計算結果	95

4.4	周波数分散構造ウェーク場	96
4.4.1	周波数分散構造の形状	96
4.4.2	オープンモード展開による周波数分散構造のウェーク関数の計算	99
4.4.3	無結合加速セルとの比較	111
4.5	実機の周波数分散構造との違いと今後の問題	112
4.5.1	壁損失の効果	112
4.5.2	今後の課題	113
4.6	加速モード特性	115
4.6.1	計算形状	116
4.6.2	計算結果	116
5	周波数分散構造の双極モードの測定	118
5.1	測定の目的	118
5.2	測定方法	118
5.2.1	モデル加速管	118
5.2.2	測定のセットアップ	119
5.2.3	周波数・電磁場の測定方法	122
5.3	測定結果	124
5.3.1	共振周波数	124
5.3.2	電磁場	124
5.4	まとめ	125
6	本研究のまとめ	127
6.1	本研究の成果	127
6.2	今後の課題	128
A	ウェーク場の基本的理論	131
A.1	ウェークポテンシャルの定義	131
A.2	縦ウェークポテンシャルと横ウェークポテンシャルの関係	132
A.3	縦ウェークポテンシャルの性質	133
B	ベクトル波動方程式	135
B.1	直交性	135
C	フィールドマッチング	138
C.1	軸対称構造の波動方程式	138

C.2	加速セルのフィールドマッチング	139
C.2.1	加速セル内の形状	139
C.2.2	加速セル内のヘルツベクトル	139
C.2.3	加速セル内の電磁場	142
C.2.4	フィールドマッチング	142
C.2.5	行列表示	144
C.3	蓄積エネルギー	145
C.4	キック因子	146
C.5	電場の体積分	147
C.6	ディスク境界面での電場と磁場のベクトル積	148
D	双極モードの電磁場の分布	150
E	ディスク形状の変化に対する双極モードの周波数とキック因子の変化	158
F	行列 X の性質	166
F.1	行列 X のエルミート性	166
F.2	行列 X の成分の分布	169
F.3	行列 X のトレース	170
G	オープンモード展開に於けるキック因子の計算	171
G.1	周期構造のキック因子の計算	171
G.2	非周期構造のキック因子の計算	173
H	フィールドの積分から直接行列 X を評価した場合	176
I	行列 X_S の収束	183
J	エルミート行列 X を用いた場合	189

目次

1.1	蓄積リングを用いた衝突型加速器の概念図	2
1.2	世界の主な衝突型加速器	4
1.3	JLC-Iの構成図	8
1.4	JLCのビーム形状	9
1.5	JLCのビームサイズ	10
1.6	自由空間中の荷電粒子による電場	11
1.7	抵抗のある境界で囲まれたときのウェーク場の例	11
1.8	障害物によるウェーク場の例	12
1.9	加速管内のウェーク場を記述するときの座標系	13
1.10	ロスパラメーターを計算するときの積分経路	15
1.11	加速管のインピーダンス	17
1.12	加速管内のウェーク場	18
1.13	減衰構造の概念図	19
1.14	定インピーダンス加速管の概念図	20
1.15	周波数分散構造の概念図	22
1.16	加速セルと共振回路	25
1.17	無結合共振等価回路モデル	25
1.18	無結合共振等価回路モデルの分散関係とキック因子	26
1.19	単一パスバンド等価回路モデル	27
1.20	単一パスバンド等価回路モデルの分散関係とキック因子	27
1.21	二重パスバンド等価回路モデル	28
1.22	二重パスバンド等価回路モデルの基底モード	29
1.23	K. L. F. Baneらの二重パスバンド等価回路モデルによるキック因子	29
1.24	二重パスバンド等価回路モデルの分散関係とキック因子	30
2.1	フィールドマッチングの計算形状	33
2.2	計算する形状	34
2.3	双極モードのキック因子の分布	37
2.4	加速セル ($a=4.5\text{mm}$) の次のバンチの位置 (1.4 nsec) の近傍のウェーク関数	38
2.5	双極モードの分散関係	40
2.6	HEM ₁₁ の同期モードの電磁場分布	41

2.7	ディスク孔を変えたときの双極モードの分散関係	42
2.8	セル間位相差 $\phi=0$ のときの HEM_{11} の電場	43
2.9	ディスク孔によるキック因子の変化	43
3.1	周期構造内の計算領域	47
3.2	周期構造内の分散関係	48
3.3	周期構造の電磁場を固有関数展開するときの固有関数の定義域	50
3.4	境界条件と分散関係上でのモードの位置	51
3.5	TM ₁₁₀ like- π とTE ₁₁₁ like-0の電場	55
3.6	面積分から行列を作りオープンモード展開したときの分散関係	63
3.7	分散曲線上の $\omega_{\phi jj}$ と $a_{\phi ij}$	65
3.8	行列変換の計算アルゴリズム	70
3.9	X をエルミート行列にしたときの分散関係	71
3.10	カップリングが小さい場合のオープンモード展開の等価回路	73
4.1	本章で取り扱う非周期構造	80
4.2	非周期構造の電磁場を固有関数展開するときの固有関数の定義域	82
4.3	非周期構造の固有関数の近似	85
4.4	非周期構造の左端の境界条件	90
4.5	非周期構造の積分経路	94
4.6	計算した非周期構造	96
4.7	MAFIAとオープンモード展開の共振周波数	97
4.8	MAFIAとオープンモード展開で計算されたキック因子	97
4.9	周波数分散構造のセルの分散関係	100
4.10	周波数分散構造の形状	101
4.11	オープンモードの電場分布	101
4.12	周波数分散構造のキック因子の分布	103
4.13	周波数分散構造の固有ベクトル	104
4.14	周波数分散構造の固有ベクトル	105
4.15	低次のモードのモード間の周波数差	107
4.16	加速管1本の場合と4本の場合のキック因子	108
4.17	周波数分散構造のウェーク関数の絶対値の包絡線	108
4.18	周波数分散構造の共振モードごとのウェーク関数	109
4.19	少しずつ形状の異なる4個の周波数分散構造のウェーク関数の絶対値の包絡線	110
4.20	各セルの同期モードのキック因子とオープンモード展開のキック因子	111
4.21	ウェーク関数のカップリングの効果	112
4.22	壁損失を考慮したときの周波数分散構造のウェーク関数の絶対値の包絡線	114
4.23	現在のX-バンド加速管の加速セル	115
4.24	加速モードおよび双極モードを計算するときのセルの形状	116
4.25	周波数分散構造の加速モード特性	117

5.1	モデル加速管のディスク孔 $2a$ の分布	119
5.2	ループアンテナと移動機構	121
5.3	モデル加速管測定システム	122
5.4	ダイポールモードの共振周波数の測定結果と計算結果	124
5.5	14 番目の共振モードのオープンモードの成分	126
5.6	直径 1.2mm の摂動球による 14 番目の双極モードの周波数変化	126
A.1	先行電荷と試験電荷の位置関係	132
B.1	関数の定義域とその境界	137
C.1	フィールドマッチングの計算形状	140
D.1	1~8 番目のモードのフィールドパターン ($a=4.5$ mm, $\phi = 0$ rad.)	152
D.2	9~16 番目のモードのフィールドパターン ($a=4.5$ mm, $\phi = 0$ rad.)	153
D.3	17~24 番目のモードのフィールドパターン ($a=4.5$ mm, $\phi = 0$ rad.)	154
D.4	1~8 番目のモードのフィールドパターン ($a=4.5$ mm, $\phi = \pi$ rad.)	155
D.5	9~16 番目のモードのフィールドパターン ($a=4.5$ mm, $\phi = \pi$ rad.)	156
D.6	17~24 番目のモードのフィールドパターン ($a=4.5$ mm, $\phi = \pi$ rad.)	157
E.1	加速周波数が 11.424 GHz のときのセルの形状	159
E.2	1~3 番目の同期モードの周波数とキック因子	160
E.3	4~6 番目の同期モードの周波数とキック因子	161
E.4	7~9 番目の同期モードの周波数とキック因子	162
E.5	10~12 番目の同期モードの周波数とキック因子	163
E.6	13~15 番目の同期モードの周波数とキック因子	164
E.7	16~18 番目の同期モードの周波数とキック因子	165
G.1	非周期構造の電場の積分経路	175
H.1	面積分から行列を作りオープンモード展開したときの分散関係 ($a=3.0$ mm)	177
H.2	面積分から行列を作りオープンモード展開したときの分散関係 ($a=4.5$ mm)	178
H.3	面積分から行列を作りオープンモード展開したときの分散関係 ($a=6.0$ mm)	179
H.4	面積分から行列を作りオープンモード展開したときのキック因子 ($a=3.0$ mm)	180
H.5	面積分から行列を作りオープンモード展開したときのキック因子 ($a=4.5$ mm)	181
H.6	面積分から行列を作りオープンモード展開したときのキック因子 ($a=6.0$ mm)	182
I.1	収束係数による分散関係の変化 (係数が小さい場合)	184
I.2	収束係数による分散関係の変化 (係数が中間の場合)	185
I.3	収束係数による分散関係の変化 (係数が大きい場合)	186
I.4	収束係数による周波数変化 ($\phi = \pi/4$ rad.)	187
I.5	収束係数による周波数変化 ($\phi = 3\pi/4$ rad.)	188

J.1	\mathbf{X} をエルミート行列にしたときの分散関係 ($a=3.0\text{mm}$)	190
J.2	\mathbf{X} をエルミート行列にしたときの分散関係 ($a=4.5\text{mm}$)	191
J.3	\mathbf{X} をエルミート行列にしたときの分散関係 ($a=6.0\text{mm}$)	192
J.4	\mathbf{X} をエルミート行列にしたときのキック因子 ($a=3.0\text{mm}$)	193
J.5	\mathbf{X} をエルミート行列にしたときのキック因子 ($a=4.5\text{mm}$)	194
J.6	\mathbf{X} をエルミート行列にしたときのキック因子 ($a=6.0\text{mm}$)	195

表 目 次

1.1	JLC-I のパラメーター	9
1.2	空洞のモードを計算する代表的なコード	23
2.1	ディスクロード型 X-バンド加速管の双極同期モードの特性	36
4.1	非周期構造の場合の固有関数の近似	85
4.2	MAFIA とオープンモード展開の計算結果の比較	98
4.3	計算する周波数分散構造の HEM_{11} と HEM_{16} の密度分布	99
4.4	オープンモードの Q 値	113
4.5	加速モード特性	116
D.1	典型的な加速セルの寸法	150
D.2	0 と π モードの電磁場の特性	151
H.1	加速セルの形状と計算結果の図番号	176
J.1	加速セルの形状と計算結果の図番号	189

第 1 章

序論

1.1 研究の背景

1.1.1 加速器の発明からリニアコライダーまで

加速器とは、静電場や高周波電場を用いて荷電粒子を加速する装置である。発明の当初は主に原子核実験に用いられ、原子や原子核の構造を調べるために使われた。その後、加速エネルギーの増加に伴い素粒子実験にも用いられるようになり、現在では非常に強力な実験道具となっている。世界中のほとんどの高エネルギー加速器は素粒子実験を目的として建設されたと言っても過言ではない。また近年では、その利用はますます多岐にわたり、工学・医学の分野でも用いられるようになってきている。また、加速された荷電粒子そのものを用いるのではなく、それが放射する放射光の利用は現在最も期待されている加速器利用の一つである。今日では、加速器は理学は言うに及ばず、諸分野で日常的に使用されるようになってきている。

加速器は、静電場と高周波電場で加速するものに大別できる。静電場を用いる加速器の加速電圧の限界は、絶縁物の耐電圧から決まるため極端に高くできない。この問題は、高周波電場を用いることにより解決できる。これを用いる線形加速器は、1924年スウェーデンの Ising によって提案された。その後、1928年 R. Wideröe により加速試験に成功した。しかし、当時、周波数が高くかつ高出力の真空管が開発されていなかったため、この種の高周波を用いる線形加速器はなかなか発達しなかった。その後、第二次大戦中、レーダーの開発に伴い大電力高周波源の著しい進歩があり、線形加速器の実用化が可能となった。そして現在では、Stanford Linear Accelerator Center(SLAC) に於いて全長 3[km] 加速エネルギー 50[GeV] の電子線形加速器が建設され順調に稼働している。一方、線形加速器とは異なり一つの電極で多数回加速することができる円形加速器であるサイクロトロンが、1931年に E. O. Lawrence と M. S. Livingston によって発明され大成功を収めた。サイクロトロンは、エネルギーによりビームの軌道が異なるので、高エネルギーの粒子を得るためには巨大な装置が必要となる。その後、磁場を変化させることにより軌道半径を一定に保つシンクロトロンが発明され、この問題は解決された。現在では、高エネルギー物理学研究所

(KEK) の TRISTAN や Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire (CERN) の LEP をはじめ世界中の主な高エネルギー加速器のほとんどのものは、シンクロトロンである。

素粒子物理学は、理論と加速器を用いた衝突実験とが互いに密接に影響を及ぼし合いながら、近年目覚ましく発展してきた。そして、より質量の大きい素粒子が素粒子物理学上の興味の対象になるに従い、より高エネルギーの加速器が必要となってきた。この理由から、この種の加速器は、より高エネルギーの衝突実験が可能な装置を目指して発展してきた。初期の頃の加速器を用いた衝突実験は、固定ターゲットに加速ビームを当てる方法で行っていた。しかし、この方法では衝突のエネルギー（重心系のエネルギー）は、粒子の加速エネルギー（実験室系のエネルギー）の $1/2$ 乗でしか増加せず、高エネルギーでの衝突実験には不向きである。そこで、加速粒子同士を正面衝突させることにより、極めて高い重心系のエネルギーで衝突実験を可能にする衝突型加速器が考案され、1963年 ADA(フラスカッチ研究所、イタリア)で成功した。その後、素粒子実験を目指した高エネルギー加速器の主流は、この衝突型加速器となる。電子・陽電子のように質量が同じで電荷の符号のみ異なる粒子を用いた衝突型加速器の場合、図 1.1(a) のように1個のシンクロトロンで両方の粒子を加速し、衝突実験を行う。他方、電荷の符号が同じ粒子同士、または電荷量や質量あるいは加速エネルギーの異なる粒子同士の衝突実験には、図 1.1(b) のように2個のシンクロトロンを用いて、その交点で衝突させる。図 1.1(a), (b) のいずれも蓄積リングと呼ばれ、今日あるほとんどの高エネルギーの衝突型加速器は、この蓄積リングを用いたものである。

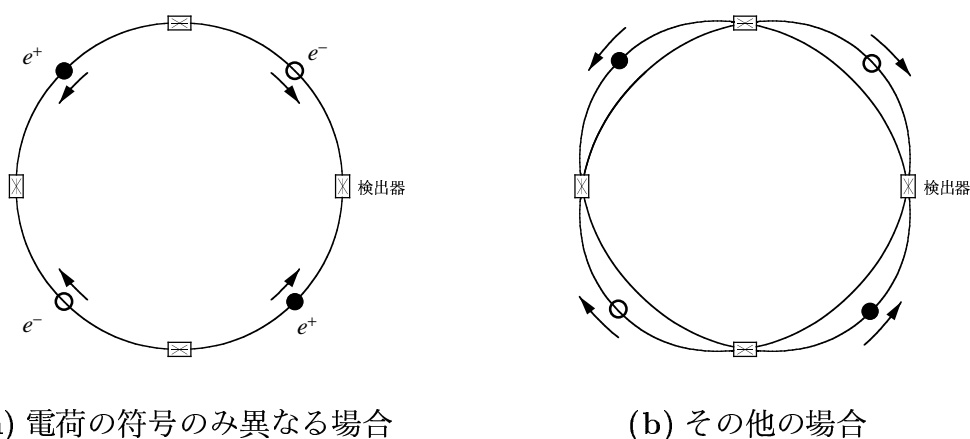


図 1.1: 蓄積リングを用いた衝突型加速器の概念図

次に、現在、盛んに素粒子実験に用いられている電子シンクロトロンのエネルギーの限界について考察する。

シンクロトロンの場合、その加速エネルギーはシンクロトロン放射によるエネルギー損失と加速空洞でのエネルギー利得との釣り合いによって決まる。シンクロトロン放射による円形加速器1周あたりの電子の加速電圧の損失 ΔV は次式で示され、電子のエネルギー

E の4乗に比例し、その軌道半径 ρ に反比例する。

$$\Delta V = \frac{4\pi e}{3(m_0c)^4} \frac{E^4}{\rho} \quad (1.1)$$

ここで、 e は電子の電荷量、 m_0 は電子の静止質量、 c は光速度をそれぞれ示す。式からただちにわかるように、電子シンクロトロン¹の加速エネルギーを上げるためには、加速空洞での加速電圧を上げるか軌道半径を大きくする必要がある。現実の大型電子シンクロトロンでは、使用可能な電力¹に限界があるので軌道半径を大きくする方向で高エネルギー化を進めてきた。

そこで、加速エネルギーと軌道半径の関係について考察する。リングに占めるRF空洞の長さの割合を一定とした場合、シンクロトロン放射損失 ΔV を補償するための加速電圧 ΔV は、次式のように軌道半径 ρ とRF空洞の加速電界 G_0 に比例する。

$$\Delta V \propto \rho G_0 \quad (1.2)$$

また、RF電力 P は軌道半径 ρ とRF空洞1個当たりの加速電界 G_0^2 に比例する。

$$P \propto \rho G_0^2 \quad (1.3)$$

式(1.1)、(1.2)と(1.3)から、RF電力 P を一定とした場合、軌道半径はビームの加速エネルギーの $8/3$ 乗に比例することがわかる。また、RF空洞の加速電界 G_0 とリングに占めるRF空洞の長さの割合を一定とした場合、すなわち軌道半径 ρ に比例してRF電力 P を使用した場合、軌道半径は加速エネルギーの2乗に比例する。

これらのことから、電子シンクロトロンの場合、軌道半径は加速ビームのエネルギーの $2 \sim 8/3$ 乗で大きくせざるをえない。図1.2に世界の主な電子シンクロトロン¹の軌道半径の大きさとその加速エネルギーを示す。CERNのLEPは、平均直径8.5[km]で50[GeV]の電子・陽電子を加速している。しかし、350[GeV]程度と考えられているトックオークやヒッグス粒子を探求するためには、LEPの数倍のエネルギーが必要である。電子・陽電子シンクロトロンでこのエネルギーを得るためには、途方もなく巨大な加速器を建設しなくてはならず、全く現実的ではない。

一方、線形加速器を用いたリニアコライダー [1] の方は、ビームを偏向することによるシンクロトロン放射によるビームエネルギーの損失が無い¹ため、更に高い(LEPより高い)エネルギーの電子・陽電子衝突型加速器として残された唯一の方法として世界中で研究されている。現在、稼働しているリニアコライダーはStanford Linear Collider (SLC) だけであり、長さ約3[km]の1本の線形加速器で構成され、電子・陽電子を同一パルスで50[GeV]まで加速する。これは、同じエネルギーのLEPに比べその加速器の全長は、約一桁小さい。更に高エネルギーのリニアコライダーとして、長さ10～数10[km]の線形加速器を2台対向させそれぞれ電子・陽電子を数100[GeV]から1[TeV]程度に加速する加速器の建設の計画がある。

¹KEKのTRISTANでは、約100[MW]の電力を使用している。

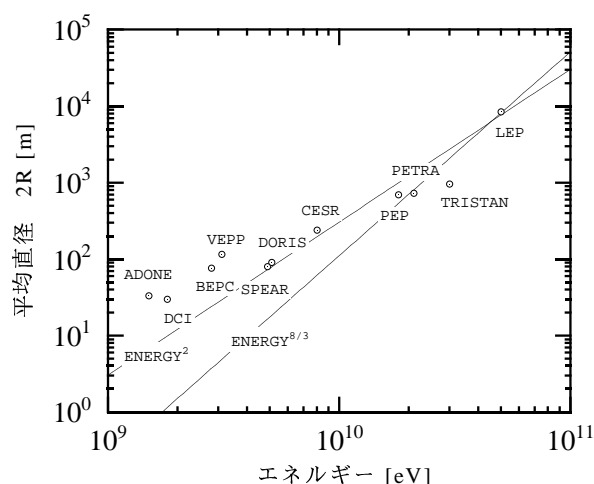


図 1.2: 世界の主な衝突型加速器（電子・陽電子の蓄積リング）。参考文献 [3] より引用。

1.1.2 主線形加速器におけるエミッタンス保存

エネルギー開拓領域での素粒子実験を行うためには、より高い加速エネルギーの加速器が必要であることは言うまでもないが、反応の生じるイベント数も実験の精度を決める上で決定的に重要である。そのイベント発生レート Y は、加速ビームのルミノシティ L と衝突断面積 σ の積に等しい。

$$Y = L \cdot \sigma \quad (1.4)$$

このうち衝突断面積 σ は自然法則により決まっている量なので、イベント発生レート Y を大きくするためには十分なルミノシティ L を得ることのできる加速器を開発する必要がある。ルミノシティは粒子の衝突頻度を表すパラメーターで、これは次式のように評価される。

$$L = \frac{N^2 m_b f_{rep} H_D}{4\pi\sigma_x\sigma_y} \quad (1.5)$$

ここで、 N は粒子数を、 m_b はパルスレイン当たりのバンチ数を、 f_{rep} はパルス繰り返し周波数を表す。また、 H_D はピンチ増大因子と呼ばれるものであり、衝突の際、電子・陽電子間の引力によりバンチが横方向（ビームの運動方向と垂直）に圧縮される効果（ピンチ効果）を示している。そして、 σ_x と σ_y はピンチ効果を考えずビームのエミッタンスとオプティクスから決まる衝突点での垂直方向と水平方向のビームサイズである。蓄積リングの場合 $m_b f_{rep} = 100[\text{kHz}] \sim \text{数}[\text{MHz}]$ の頻度で衝突を起こすが、リニアコライダーでは $10[\text{kHz}]$ 程度と少ないため衝突点でのビームサイズを絞ることによりルミノシティを増加させようとしている。リニアコライダーでは各バンチの衝突は1回限りで捨ててしまうため、蓄積リングのように衝突後のビームの安定性を考えなくてもよいので、収束力を極端に強くしてビームを絞ることができる。

衝突点でのビームサイズは、最終収束系でのオプティクスとそこでのビームのエミッタンスに依存している。最終収束系への低エミッタンスビームの供給は、ダンピングリン

グから出射される低エミッタンスビームを主加速器でエミッタンスをいかに増加させないで加速するかにかかっている。主加速器でエミッタンスを増大させる最も深刻な要因の1つは、加速管内の横方向ウェーク場によるビーム不安定性である。これは、バンチが何らかの影響で加速管の中心からずれて入射された場合、ビームに横方向偏向力を与える横方向ウェーク場¹が誘起され後続バンチが横方向に蹴られることが原因となって生じる。

加速器科学の世界では、ウェーク場をその影響の及ぶ範囲から短距離ウェーク場と長距離ウェーク場に分けて議論を行うことが多い。同一バンチ内、すなわちバンチ長に影響の及ぶものを短距離ウェーク場²と呼ぶ。これによるエミッタンスの増加は、次に示す対策などによりその値を許容値以下にする必要がある。

- 加速管の横方向ウェークのモードに対するインピーダンスを下げる。そのためには、加速管のディスク孔をある程度大きくする必要がある。
- ビームを加速管の中心を通過させることにより、このモードを誘起させない。そのためには、加速セルのアライメントやビームステアリングを精度良く行う必要がある。
- ビームを加速電界の頂上より少し後方で加速することにより、バンチ内の位置に依存するウェークフィールドに見合ったバンチ内の位置に依存する収束力を持たせる BNS ダンピング [4] を用いる。

この短距離ウェーク場は本研究の対象ではないので、これ以上、詳細には述べない。本研究の対象は、次に述べる長距離ウェーク場である。

一方、長距離ウェーク場はバンチ間にその影響が及ぶものをいう³。特に、リニアコライダーでは主線形加速器の加速管で生じる長距離ウェーク場が問題であり、その対策のための種々の加速管が提案され研究されている。ここでの研究の最も重要なことのひとつは、加速管の形状からそこでのウェーク場を求めることである。

ウェーク場は、加速管の形状を反映する加速管のモードで展開可能である。特に、長距離ウェーク場は、主に加速管の比較的周波数の低い少数のモードで展開できる [6] [8]。したがって、これらのモードを計算すれば長距離ウェーク場の評価ができる。JLC の X-バンド加速管の場合、ウェーク場の成分の最も大きいモードは 15[GHz] 付近にあるので、124[nsec] (JLC パルス長) の距離で大体 2000 回振動する。したがって、この距離までウェーク場を計算するためには 10^{-4} 以上の周波数の精度が必要であると推測している。そのためには、加速管の構造 (寸法) を精度良く取り入れてそのモードを計算することが重要となる。本研究の最も重要な目的は、この計算を行う方法を開発することである。

本論文は、加速管内の長距離ウェーク場についてその計算方法を研究した成果をまとめたものである。

¹バンチにより誘起された電磁場をウェーク場と呼び、後方のバンチに横方向偏向力を与えるものを横方向ウェーク場と呼ぶ。詳細は、1.2節を参照。

²JLC では、バンチ長は 67[μm] である。時間で表すと、0.223[psec] 以下のものを短距離ウェーク場と呼ぶ。

³JLC では、次のバンチ 1.4[nsec] からパルス幅 124[nsec] の長距離ウェーク場が問題となっている。

1.1.3 Japan Linear Collider

前小節で示した理由によりエネルギー開拓領域での素粒子実験を目指している各国の研究所では、リニアコライダーの研究開発を行っている。日本ではKEKを中心とした Japan Liner Collider (JLC) の計画があり、将来のエネルギー開拓領域での実験を目指して基礎的な研究を行っている。本研究はその一環として、主線形加速器の加速管内のウェーク場について研究を行ったものである。これはリニアコライダーに限らず一般的に加速管に適用できるが、ここでの計算に用いたパラメーターはJLCの主線形加速器のものである。そこで、そのパラメーターの一部と構成機器の概要を示す。

JLC の構成部品

JLC は、以下のような主な機器から構成される巨大な加速器のシステムである。その構成を図 1.3 に示し、それらの機器の概略を以下に述べる。

- 電子・陽電子発生源
電子ビームの発生は、熱電子銃、RF 電子銃、偏極電子銃などを用いて行う。一方、陽電子ビームの発生は電子銃で発生した電子を 10[GeV] まで加速して、固定ターゲットに衝突させ、制動輻射で発生した光子から電子・陽電子が対生成される過程を利用する。このようにして発生した陽電子ビームのエミッタンスは、非常に大きいのでダンピングリングへ入射する前にプレダンピングリングによりエミッタンスを所定の値まで減衰させる。
- 入射線形加速器
電子・陽電子発生源で発生した電子・陽電子ビームをダンピングリングの入射エネルギーまで加速する。ここでの電子・陽電子ビームのエミッタンスが悪いため、入射線形加速器には、アクセプタンスの広い S-バンド加速管を予定している。
- ダンピングリング
電子・陽電子ビームをアンジュレーター等を用いて、所定のエミッタンスまで冷却する。
- バンチコンプレッサー
ダンピングリングから出射されるビームのバンチ長は約 5[mm] と長いため、そのまま加速すると主線形加速器でエネルギー拡がりが生じたり、横方向短距離ウェーク場によりバンチ後方が大きくキックされる。これらを抑えるために、バンチ長を 67[μ m] まで圧縮する。
- 主線形加速器
エミッタンスの増加を許容値以内にとどめ、電子・陽電子ビームを所定のエネルギーまで加速する。

- 最終収束系
主線形加速器で加速されたビームは、ルミノシティを上げるために最終収束系によりビームサイズを縦 3[nm], 横 260[nm] まで絞る。そして、衝突を維持させる。
- 電子・陽電子衝突部の測定器
種々の測定器で電子・陽電子ビームの衝突により発生した素粒子の電荷・運動量・寿命などの測定を行う。

JLC の主線形加速器のパラメーター

主加速器が X-バンドの場合の JLC の主なパラメーター [2] を表 1.1 に示す。これらのパラメーターの中から、本研究と密接に関係している主線形加速器の加速管の運転周波数とその中を通過するビームに関するパラメーターについて述べる。

同じ加速電場の場合、運転周波数の高い加速管ほどその断面積が小さいため蓄積エネルギー (Stored Energy) は少い。したがって、充填時間 (Filling Time) と同程度のパルス幅のビームを加速する場合、運転周波数の高い加速管ほどエネルギー効率が良い。JLC では使用電力を軽減させるために、加速管の運転周波数は、現在の線形加速器でよく使用されている S-バンドの 4 倍 (11.424[GHz]) の X-バンドが検討されている。運転周波数の高い加速管は、使用電力を軽減する一方、ウェーク場が強くなる弊害が生じる。X-バンドの加速管の横ウェーク場は、相似形の S-バンドの加速管に比べ 64 倍になる。さらに、ここで加速されるビームのパルスレイン内平均電流は 800[mA] になり、従来から使用されてきた S-バンド電子線形加速器で多バンチを加速する場合の数倍に相当する。これら 2 つの効果から、JLC の X-バンド加速管のウェーク場は、通常の S-バンド線形加速器のそれに比べ数百倍大きくなる。したがって、ウェーク場対策を十分考慮した加速管を開発する必要がある。

JLC のパルスレインは、図 1.4(a) に示すように、パルス繰り返しは 150[pps] であり、パルスレインは 1.4[nsec] 間隔の 90 バンチから成り、各々のバンチには 0.7×10^{10} 個の電子または陽電子が含まれる。このバンチ間隔は、X-バンド加速管の $16RF$ バケットに相当し、全ての RF バケットにバンチを詰め込むのに比べて 16 倍の時間をかけてウェーク場を減衰すればよく、現実的な加速管の設計が可能となる。

次に、主線形加速器内でのビームサイズを考える。ビームエネルギー $E = 10[\text{GeV}]$ でベータートロン関数 β を 3[m] とし、エネルギーとともに $\beta \propto \sqrt{E}$ となるオプティックスを考え、規格化エミッタンスは不変とするとビームのサイズは図 1.5 のようになる。この図からわかるように、JLC の主線形加速器では x 方向 10[μm], y 方向 1[μm] 程度の扁平なビームを加速する。

横方向ウェーク場の大きさは、それを誘起するバンチ位置と加速管中心との差に比例する [式 (1.8)]。加速管中心をビーム軌道に一致させるために、パルスごとにビーム位置を測定し加速管中心を移動させることを検討している。この場合、加速管中心とビーム軌道との差は、ビーム位置モニターの精度の制限から $\sim 10[\mu\text{m}]$ 程度と考えられている。これ以上のビーム位置モニターも開発中であるが、困難が伴うため、この差が許容できる加速管を開発する必要があり、それが本研究の発展する最終目標である。

Schematic Diagram of JLC-1

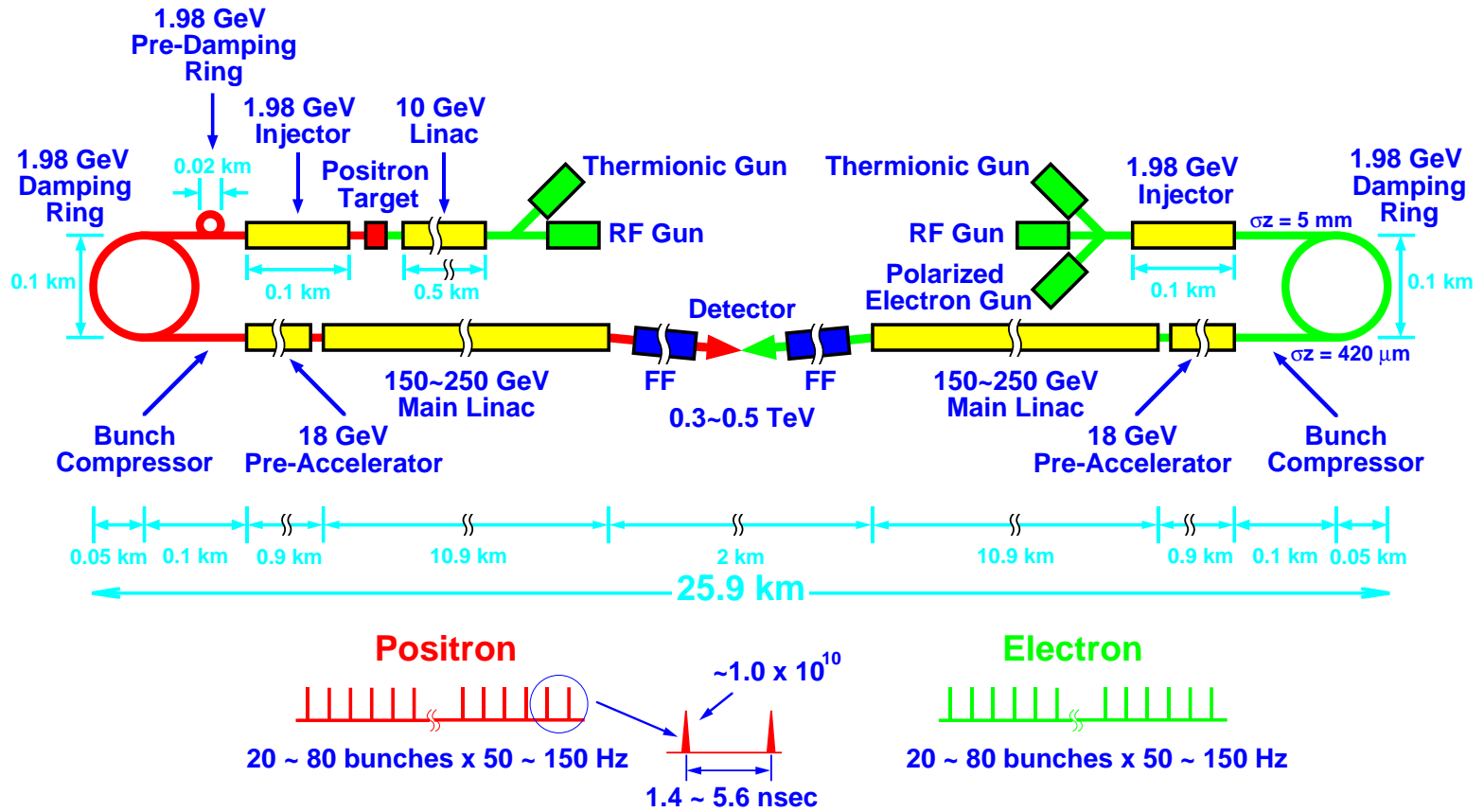
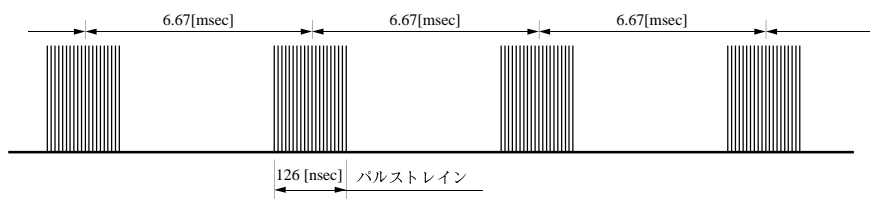
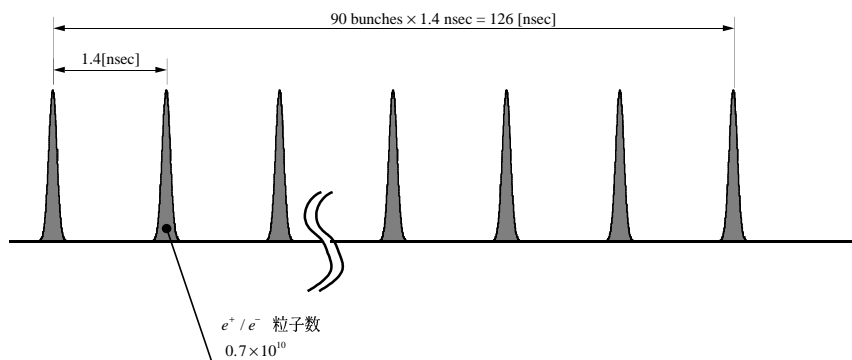


図 1.3: JLC-1 の構成図。参考文献 [2] より引用。

S.Takeda & H.Matsumoto / JLCdiag / 910906
 Revised by J.Urakawa, M.Kikuchi & T.Kawamoto / 930614



(a); 繰り返し 150[pps] でパルストレインが加速器から出射される様子



(b); パルストレインの形状

図 1.4: JLC のビーム形状

表 1.1: JLC-I のパラメーター [2]

項目	記号	単位	値
加速周波数	f_{rf}	GHz	11.424
重心系エネルギー	\sqrt{s}	GeV	250
粒子数/バンチ	N		0.7×10^{10}
バンチ数/パルス	m_b		90
バンチ間隔	t_b	nsec	1.4
パルス繰り返し周波数	f_{rep}	Hz	150
規格化エミッタンス (ダンピングリング出口)	ε_x	rad·m	3×10^{-6}
	ε_y	rad·m	3×10^{-8}
r. m. s. バンチ長	σ_z	μm	67
r. m. s. ビームサイズ (衝突点)	σ_x	nm	260
	σ_y	nm	3.04
ピンチ増大因子	H_D		1.72
ルミノシティ	L	$\text{cm}^{-2}\text{sec}^{-1}$	6.3×10^{33}

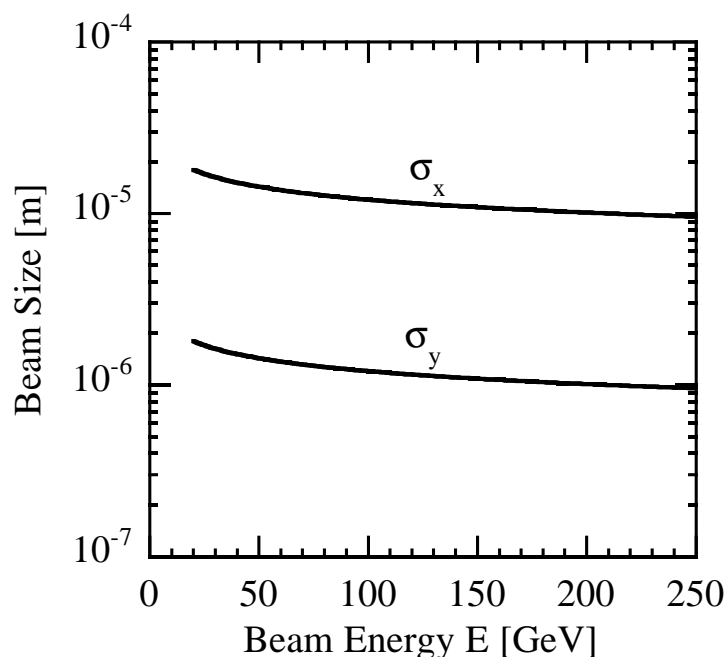


図 1.5: JLC のビームサイズ

1.2 ウェーク場

主線形加速器でエミッタンスを増加させる主な要因1つは、加速管内の横方向ウェーク場による横方向キックである。本節では、このウェーク場の基本的な性質とリニアコライダーで考えられているその対策について述べる。

1.2.1 ウェーク場の概念

自由空間をほぼ光速の荷電粒子が運動するとき、電場の強度の分布はその運動方向と垂直な方向が圧倒的に大きい。この状況を図 1.6 に示す。運動方向に対して一様な完全導体の構造物（ビームパイプのようなもの）に囲まれた場合も、電場の強度の分布はその運動方向と垂直な方向が圧倒的に大きい。

しかし、荷電粒子が抵抗のある導体を通過する場合（図 1.7）や運動方向に対して一様でない構造物を通過する場合（図 1.8）、その後方に電磁場ができる。この電磁場は、船が進むことにより発生する波との類似からウェーク場（wake field; 曳航場）と呼ばれている。

このうち、抵抗のある導体に囲まれた場合のウェーク場は短距離ウェーク場である。本研究の主題は長距離ウェーク場であるため、以降この短距離ウェーク場については述べない。他方、一様でない構造物に囲まれた場合のウェーク場は、後方のバンチに影響を与える長距離ウェーク場である。本論文ではこの一様でない構造物に囲まれた場合の長距離ウェーク場だけを取り扱う。ただし、本論文ではその構造物は完全導体と仮定している。加

速管は良導体である銅でできているためこれは良い近似であると推測している。

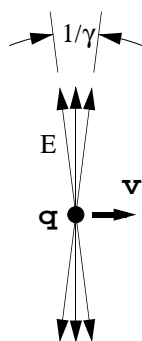


図 1.6: 自由空間中の荷電粒子による電場

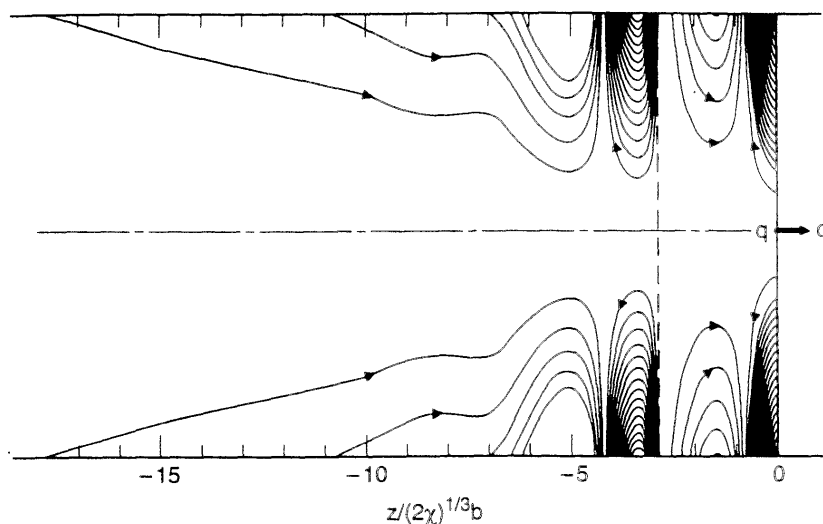


図 1.7: 抵抗のある境界で囲まれたときのウェーク場の例。参考文献 [5] より引用。

1.2.2 ウェーク場を記述する諸量

ウェークポテンシャルとウェーク関数

ウェーク場が後続の荷電粒子に及ぼす影響は、ウェークポテンシャルと呼ばれる量 $W(\mathbf{r}_\perp, s)$ で表すことができる。図 1.9 のように 2 個のバンチが加速管を通過する場合、前方の電荷

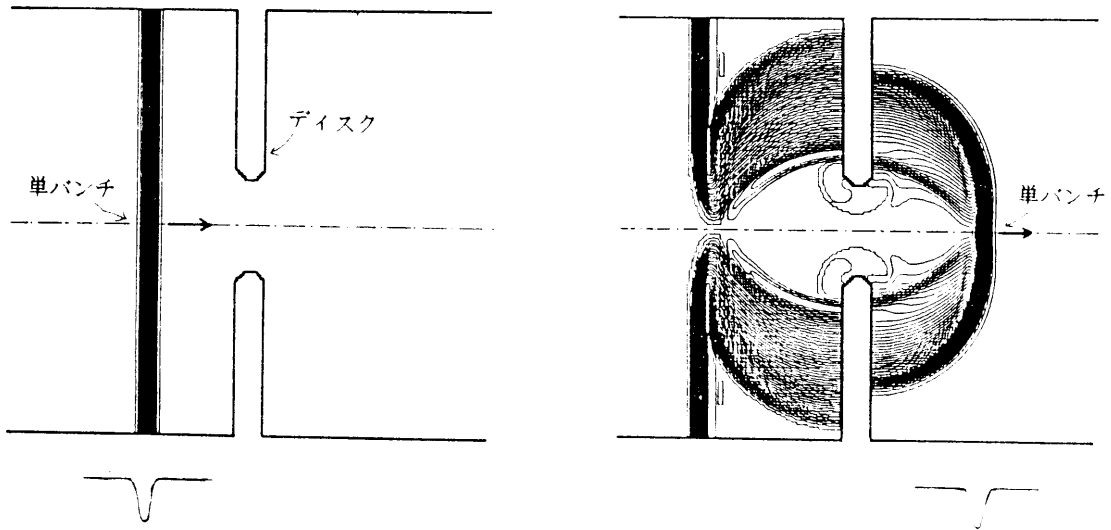


図 1.8: 障害物によるウェーク場の例。ビームパイプの途中に加速管のディスクのような障害物があるときのウェーク場を示している。参考文献 [9] より引用。

q_1 のバンチがウェーク場を誘起しそれにより後方 s^1 の位置のバンチが縦・横方向に力を受ける。ウェークポテンシャルは、この力（ローレンツ力）の積分で次式のように定義される（付録 A 参照）。

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}_\perp, s) = \frac{1}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz [\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t) + c\hat{z} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_\perp, z, t)]_{t=(z+s)/c} \quad (1.6)$$

この式からわかるように、ウェークポテンシャルはベクトル量である。加速器では、このウェークポテンシャルをビームの運動方向と同じ方向の縦方向ウェークポテンシャル W_\parallel とビームの運動方向と垂直方向の横方向ウェークポテンシャル W_\perp に分けることが多い。縦方向ウェークポテンシャルにより、後続の荷電粒子は進行方向に力を受け、その運動エネルギーが変化する。また、横方向ウェークポテンシャルにより、後続の荷電粒子は進行方向と垂直の方向に力を受け横方向の運動量の変化が生じる。この横方向の運動量の変化により、ビームのエミッタンスが増大する。

加速管のように軸対称構造の場合、ウェークポテンシャルは次式のように書き表すことができる [11]。この場合、座標系を図 1.9 にとる。

$$W_\parallel(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, s) = \sum_{m \geq 0} W_{\parallel m}(s) r_1^m r_2^m \cos(m\theta) \quad (1.7)$$

$$\mathbf{W}_\perp(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, s) = \sum_{m \geq 1} W_{\perp m}(s) r_1^m r_2^{m-1} [\hat{\mathbf{r}} \cos(m\theta) - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin(m\theta)] \quad (1.8)$$

ここで、 m は方位角依存性を表し、 $m = 0, 1, 2, \dots$ は単極、双極、4重極モード等 2^m 重極

¹ この値の次元は距離であるが、光速 c で割って時間の次元で表すこともある。本論文では後者を用いることが多い。

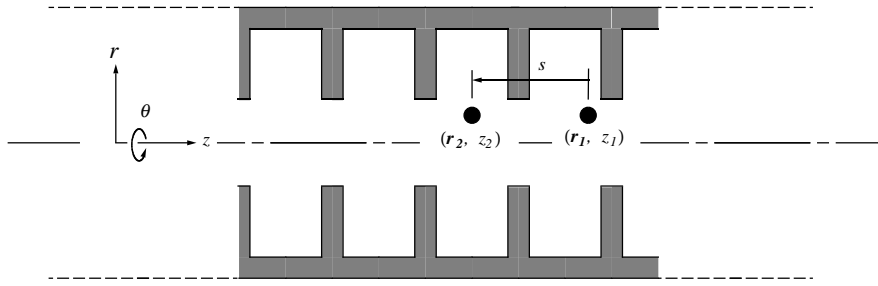


図 1.9: 加速管内のウェーク場を記述するときの座標系

モードを表す。 n は、各 2^m 重極モードの n 番目のモードを表す。 (r_1, θ_1, z_1) と (r_2, θ_2, z_2) は、ウェーク場を発生させる電荷とそれを感じる試験電荷の座標である。 \hat{r} , $\hat{\theta}$ は、それぞれ r , θ 方向の単位ベクトルである。また、 $W_{\parallel m}(s)$ と $W_{\perp m}(s)$ は、それぞれ縦・横方向ウェーク関数である。このウェーク関数は、式 (1.7)(1.8) の中で加速管の形状を反映する唯一のパラメーターである。したがって、ある加速管のウェーク場を求める問題は、ウェーク関数を求める問題と等価である。本論文では、ウェーク場の大きさはウェークポテンシャルではなくウェーク関数で示す。このウェーク関数は、次式のように加速管のモードで展開できる [11]。

$$W_{\parallel m}(s) = \sum_n \frac{2k_{mn}}{a^{2m}} \cos\left(\frac{\omega_{mn}}{c}s\right) \quad (1.9)$$

$$W_{\perp m}(s) = \sum_n \frac{2cmk_{mn}}{a^{2m}\omega_{mn}} \sin\left(\frac{\omega_{mn}}{c}s\right) \quad (1.10)$$

ここで、 c , a , ω_{mn} は、それぞれ光速、ディスク孔の半径、角振動数を表す。そして、 s はウェーク場を発生する電荷とそれを感じる試験電荷との距離を表す ($t = s/c$ として時間で表す場合もある)。さらに、 k_{mn} はロスパラメーター¹と呼ばれる量であり加速管の構造を反映するパラメーターである。

このロスパラメーター k (添字 mn は省略) は、

$$k = \frac{|V|^2}{4U} \quad (1.11)$$

と定義されている。ここで、 U は電磁場の蓄積エネルギーである。そして、 V は $r = a$ での電場の z 方向成分を図 1.10 に示す経路に沿って積分した量である。

$$V = \int E_z(z, r = a) e^{i\omega z/c} dz \quad (1.12)$$

ここで、無限に続く周期構造の場合のロスパラメーターについて考察する。このような構造内の電磁場は、進行波のモード²に分けることができる。進行波だから、各加速セル内

¹ 総電荷 Q のバンチが通過以前には電磁場が無い加速管内を軸から r 離れた場所を通過する場合、そのバンチが失う電圧 δV は $\delta V = Q \sum_{mn} k_{mn} (r/a)^{2m}$ となる。

² セル間の電磁場の位相差 ϕ が $0, \pi$ のときは定在波であるが、この場合も各加速セル内の蓄積エネルギーは全てのセルで等しい。

の蓄積エネルギー U_{cell} は、全てのセルで等しい。したがって、単位長さ当たりのロスパラメーターは、

$$\begin{aligned} k &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4NU_{cell}} \left| \int_0^{ND} E_z(z) e^{i\omega z/c} dz \right|^2 \frac{1}{ND} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4N^2 DU_{cell}} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nD}^{(n+1)D} E_z(z) e^{i\omega z/c} dz \right|^2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

となる。ここで、 N はセル数を、 D はセル長を、 $E_z(z)$ は $r = a$ での電場の z 方向成分を表す。この式を簡単にするために、変数変換と周期構造の特性を考慮する。まず初めに、

$$\xi = z - nD \quad (1.14)$$

となる変数変換を行う。すると、 n 番目のセルの電磁場は

$$E_z(z) = E_z(\xi + nD) \quad (1.15)$$

となる。つぎに周期構造という特性から、この式はフロケの定理が成り立つため、

$$E_z(\xi + nD) = E_z(\xi) e^{-in\phi} \quad (1.16)$$

と書き表せる。ここで、 ϕ はセル当たりの位相変化である。これらの変数変換とフロケの定理を用いると、式 (1.13) は、

$$k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4N^2 DU_{cell}} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(-\phi + \omega D/c)} \int_0^D E_z(\xi) e^{i\omega \xi/c} d\xi \right|^2 \quad (1.17)$$

となる。ここで、セル当たりのロスパラメーター k_{cell} を

$$k_{cell} = \frac{\left| \int_0^D E_z(\xi) e^{i\omega \xi/c} d\xi \right|^2}{4U_{cell}} \quad (1.18)$$

と定義すると、

$$k = \begin{cases} \frac{k_{cell}}{D}, & \text{for } v_p = \frac{\omega D}{\phi} = c \\ k_{cell} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2 D} \frac{1 - \cos\{N(\phi - \omega D/c)\}}{1 - \cos(\phi - \omega D/c)}, & \text{for } v_p \neq c \end{cases} \quad (1.19)$$

となる。同期モード ($v_p = c$) のときのみ $k = k_{cell}/D$ となり、その他の場合 ($v_p \neq c$) はゼロとなることがわかる。

したがって、周期構造のロスパラメーターはその1周期分から計算できる。今後、本論文では周期構造のロスパラメーターは式 (1.18) で定義されるセル当たりのロスパラメーターで記述する。

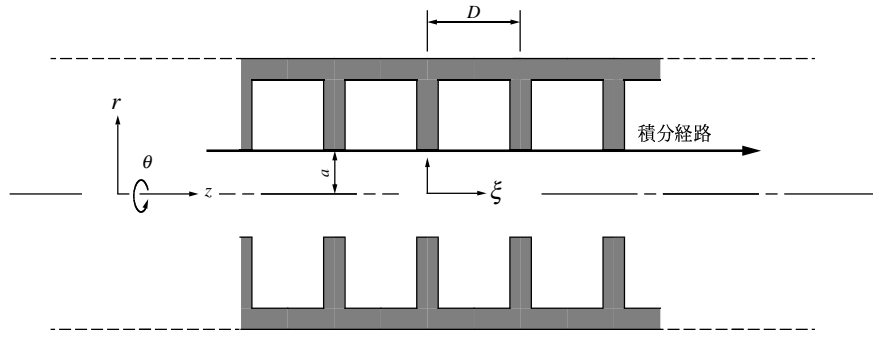


図 1.10: ロスパラメーターを計算するときの積分経路

キック因子

ウェーク場の大きさは、前小節で示したウェーク関数で表すことができる。これを加速管のモードで展開した場合、モードごとの成分を表す量としてキック因子 $\tilde{k}_{\parallel mn}$, $\tilde{k}_{\perp mn}$ を定義することができる。これらの量は次式に示すように、ウェーク関数中の三角関数の係数である。

$$\tilde{k}_{\parallel mn} = \frac{k_{mn}}{a^{2m}} \quad (1.20)$$

$$\tilde{k}_{\perp mn} = \frac{cmk_{mn}}{a^{2m}\omega_{mn}} \quad (1.21)$$

したがって、ウェーク関数は次式のようなになる。

$$W_{\parallel m}(s) = \sum_n 2\tilde{k}_{\parallel mn} \cos\left(\frac{\omega_{mn}}{c}s\right) \quad (1.22)$$

$$W_{\perp m}(s) = \sum_n 2\tilde{k}_{\perp mn} \sin\left(\frac{\omega_{mn}}{c}s\right) \quad (1.23)$$

周期構造内のキック因子は、ロスパラメーターの場合と同様に表す。すなわち、周期構造の1周期分から計算できるセル当たりのキック因子を用いて表す。これは、キック因子の定義式中のロスパラメーターを式(1.18)で定義されるセル当たりのロスパラメーターに置き換えることにより評価できる。

本論文では、加速管内で生じるウェーク場のモードごとの成分は、主にここで定義したキック因子で表す。

インピーダンス

縦方向インピーダンス $Z_{\parallel}(\mathbf{r}_{\perp}, \omega)$ と横方向インピーダンス $Z_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, \omega)$ は、ウェークポテンシャルをフーリエ変換した量として次式のように定義されている [12]。

$$Z_{\parallel}(\mathbf{r}_{\perp}, \omega) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} ds W_{\parallel}(\mathbf{r}_{\perp}, s) e^{-i\omega s/c} \quad (1.24)$$

$$Z_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, \omega) = \frac{-i}{c} \int_{-\infty}^{\infty} ds \mathbf{W}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, s) e^{-i\omega s/c} \quad (1.25)$$

横方向インピーダンスを用いて、横方向ウェークポテンシャルを記述する式を求める。ウェークポテンシャルはウェーク場を発生させる電荷からの後方の位置 s の関数であり、インピーダンスはその周波数スペクトラムである。インピーダンスを逆フーリエ変換すれば、ウェークポテンシャルを表す式を得ることが出来る。参考文献 [12] では縦方向について示しているが、本論文の対象である横方向ウェークポテンシャルに対して、同様の議論を示す。

式 (1.25) より、

$$\mathbf{W}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, s) = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{Z}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, \omega) e^{-i\omega s/c} \quad (1.26)$$

である。ところが、ウェークポテンシャルは実数なので、

$$\mathbf{W}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\Re\{\mathbf{Z}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, \omega)\} \sin\left(\frac{\omega}{c}s\right) + \Im\{\mathbf{Z}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, \omega)\} \cos\left(\frac{\omega}{c}s\right) \right] \quad (1.27)$$

となり、さらに、ウェーク場を発生する電荷の前方にはウェークが存在しないので、次式が成り立つ。

$$\mathbf{W}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, -s) = 0 \quad \text{for } s > 0 \quad (1.28)$$

したがって、式 (1.27), (1.28) より、

$$\Re\{\mathbf{Z}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, \omega)\} \sin\left(\frac{\omega}{c}s\right) = \Im\{\mathbf{Z}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, \omega)\} \cos\left(\frac{\omega}{c}s\right) \quad \text{for } s > 0 \quad (1.29)$$

が成り立つ。すると、インピーダンスを用いて、ウェークポテンシャルを表す式 (1.27) は、次式のように表すことができる。

$$\mathbf{W}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Re\{\mathbf{Z}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, \omega)\} \sin\left(\frac{\omega}{c}s\right) \quad (1.30)$$

外部とのカップリングが無かつ空洞内部では無損失の場合、モードのウェーク関数は減衰することなく永遠に単振動が続く。それゆえ、そのモードのインピーダンスは δ 関数になることは、式 (1.30) から明らかである。一方、外部とのカップリングまたは空洞内部での損失がある場合、モードのウェーク関数は距離 s (または時間) とともに減衰するので、インピーダンスに拡がりが生じる¹。

実際の加速管は抵抗のある導体から成り、その両端のカップラーセルには導波管やビームパイプが接続されており外部とのカップリングがある。通常、加速器の共振空洞の壁損失による Q 値は数 1000～数 10000 程度で非常に大きいですが、ビームパイプや導波管の Q 値 (外部 Q 値) はそれらに比べてかなり小さい。この導波管の遮断周波数は加速モードより低く²、実際では無視できないが、ここでは話を簡単にするために無視する。導波管の効果を無視した定インピーダンス型加速管のインピーダンスは図 1.11 のようになる。ビームパイプの遮断周波数以下のインピーダンスの分布は、モードの Q 値がモード間の周波数差に

¹モードの Q 値がある程度大きい場合、インピーダンスの拡がり (-3dB) は、 Q 値の逆数にほぼ等しい。

²したがって、加速管の全ての伝搬モードより低い。

比べ大きいと離散的になっている。しかし、ビームパイプの遮断周波数以上ではモードのQ値が小さいためにその分布は連続的になる。

ビームパイプの遮断周波数以上では、インピーダンスが連続的に分布しているため、分布内での相殺の効果が大きく、長距離ウェーク場への寄与は少ないと推測できる。したがって、長距離ウェーク場を計算する場合、インピーダンス（またはキック因子かロスパラメーター）は、ビームパイプの遮断周波数まで取り入れれば良い近似であると考えている。

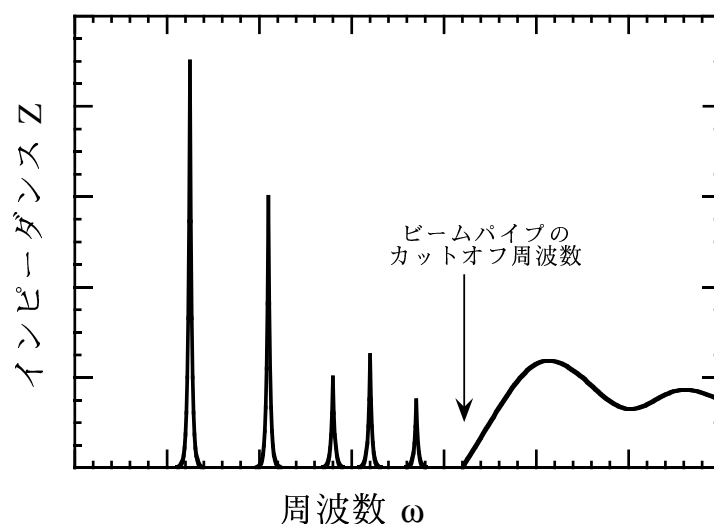


図 1.11: 加速管のインピーダンス。RF 入力用の導波管の効果は無視しているが、壁損失とビームパイプの効果は取り入れている。加速管は定インピーダンス型である。

1.2.3 本論文での加速管のウェーク場を記述する方法

前小節で述べたように、加速管のウェーク場は、後方の粒子の場所でのローレンツ力の積分と定義されているウェークポテンシャルで記述できる。このウェークポテンシャルは、加速管のウェーク関数から計算できる。そして、ウェーク関数は、加速管のモードのキック因子・周波数、又はインピーダンス分布から計算できる。

本論文の2章以降では、外部とのカップリングや壁損失の無い加速管を計算している。この場合、インピーダンス分布よりキック因子と周波数を用いてウェーク場を記述する方が便利である。したがって、本論文ではキック因子と周波数を用いてウェーク場を記述する。しかし、次節で述べる減衰構造の場合はインピーダンスを用いて記述する方が便利である。

1.2.4 加速管内の長距離ウェーク場とその減衰対策

前小節で述べたように、バンチの進行方向に対して境界の空間的变化がある場合、この後方にウェーク場が生じる。当然、加速管の場合もディスクがあるためにビームの後方にウェーク場が生じる（図 1.12）。このウェーク場により、後方のバンチが縦方向にキックされた場合、バンチ間にエネルギー拡がりが生じる。また横方向にキックされた場合、エミッタンスの増大が生じリニアコライダーでは特に問題である。

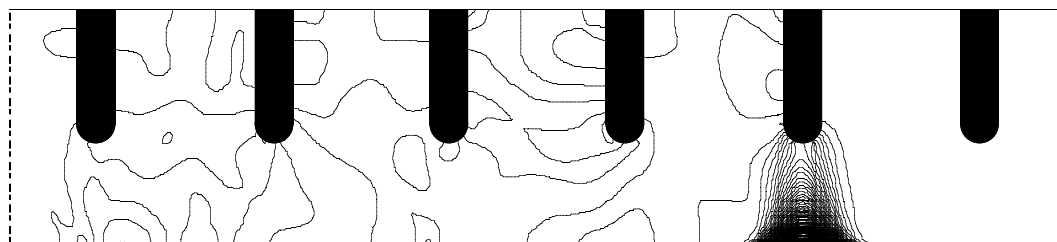


図 1.12: 加速管内のウェーク場。バンチが左から右へ進行していくときの電界強度の等高線プロット。参考文献 [10] より引用。

主線形加速器の加速管内の横方向ウェーク場のキックは、ダンピングリングから出射される低エミッタンスビームのエミッタンスを増加させる主な要因の1つである。エミッタンスの増大を許容値以下に抑えるためには、横方向のウェーク場を十分小さくする必要がある。このうち短距離ウェーク場を緩和させるためには、ある程度ディスク孔 a の大きい加速管を精度良くアライメントする以外に方法はない。この短距離ウェーク場の強度は、ディスク孔 a の大体 -3.5 乗に比例する。KEK の横谷のシミュレーションにより、JLC の X-バンド加速管の場合、 $a/\lambda \geq 0.16$ （ただし、 $\lambda = 26.24[\text{mm}]$ ）にすれば問題が無いことが分かっている [2]。

一方、長距離ウェーク場は次のバンチの位置（JLC では $s=420[\text{mm}]$ ）でそのウェーク関数を $1 \sim \text{数} \times 10^{15} [\text{V/C/m}^2]$ 程度にする必要がある [36]。長距離ウェーク場も短距離ウェーク場同様、ディスク孔 a を大きくしてウェーク関数を小さくすることは可能である。しかし、この方法でそれを許容値以下までに抑えるためには、短距離ウェーク場によって制限されているディスク孔 a よりも随分大きくする必要がある。このようにした場合、加速モードのシャントインピーダンスも大幅に低下する。リニアコライダーでの使用電力の極端な増加は許されないので、ディスク孔 a を極端に大きくして長距離ウェーク場を緩和することは不可能である。

したがって、別の方法でこの問題に対処しなくてはならない。そのために、JLC では次に示す減衰構造と周波数分散構造の加速管の研究を行っている。

減衰構造

減衰構造の基本的なアイデアは、先行バンチにより誘起されたウェーク場を後続のバンチがそこに到達する前に速やかに加速管外へ出してしまうというものである。加速管中のウェーク場の群速度はビームの速度に比べて、極端に遅いため加速セルごとにウェーク場を外部へ導く構造が必要である。そのために、減衰構造では加速セルごとにウェーク場を外部へ導く導波管が接続されている。このような減衰構造の概念を図 1.13-(b) に示す。JLC の場合、この構造で長距離横方向ウェーク場を許容値以下に抑えるためには、最もインピーダンスの大きいモードの外部 Q 値を 15 程度にする必要がある [10]。

このようにウェーク場を加速管外へ捨てる減衰構造内のウェーク関数は、距離 s とともに指数関数的に減衰する。したがって、そのインピーダンスは広がりを持った分布となる。減衰構造のインピーダンスの概念図を図 1.13-(a) に示す。

加速モードは、接続する導波管の遮断周波数を加速モードより高くすることにより、そのエネルギーが加速セルから逃げ出さないようにしている [10]。また、新竹が考案したチョークモード空洞 [13] は、チョーク構造により加速モードをセル内に保持している。いずれにしても、10%程度の加速モードの Q 値の低下を免れることはできず、この構造の欠点となっている。

本論文では、このような減衰構造は取り扱わない。

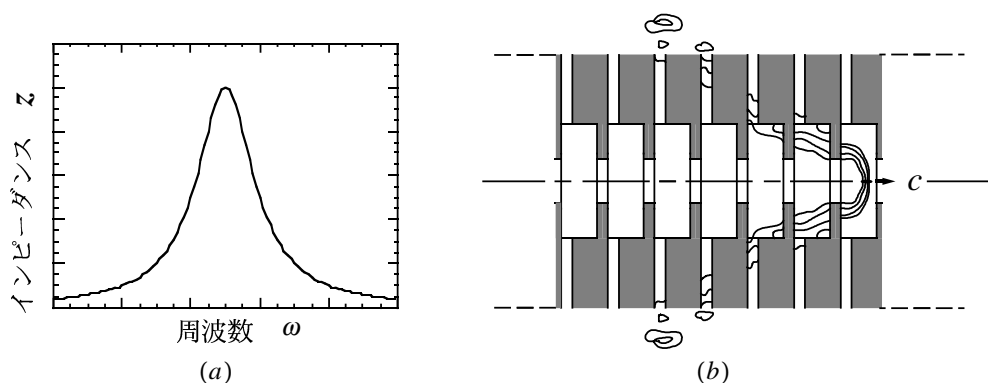


図 1.13: 減衰構造の概念図。(a); 減衰構造のインピーダンスの概念図。(b); 減衰構造中のウェーク場の様子。

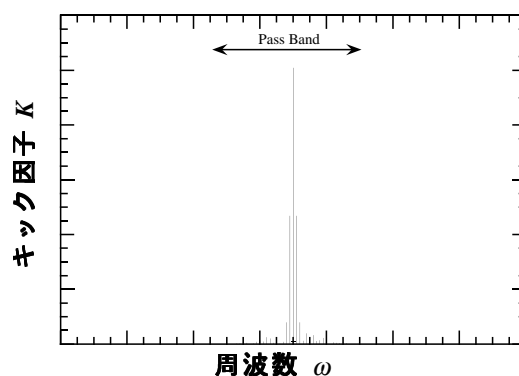
周波数分散構造

周波数分散構造の特徴を理解する場合、外部とのカップリングや壁損失は本質から外れる。事実、現在までのこの構造の研究ではこれらの効果を考慮して議論している例は少ない。本節でも外部とのカップリングや壁損失を無視して議論を行う。先の減衰構造の議論ではインピーダンスを用いた方が便利であったが、ここではキック因子を用いて議論を行う方が便利である（インピーダンスは δ 関数になる）。

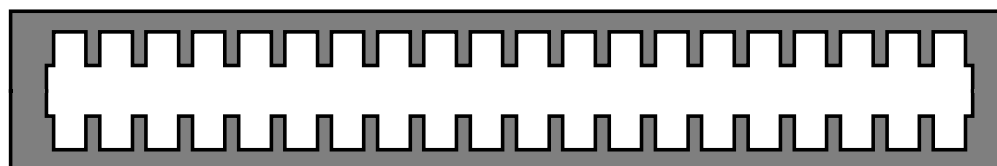
周波数分散構造を理解するために、図 1.14 (b) のようなカップラーセルの無い N 個のセルから構成される定インピーダンス加速管について考える。この加速管の問題となるモード（例えば、 TM_{110} ）のキック因子は、ビームの速度と等しい位相速度のモード（これを $n\pi/N$ モードとする）が最も大きく、隣のモードである $(n-1)\pi/N$ と $(n+1)\pi/N$ モードは大体その $1/2$ になる。この様子を図 1.14 (a) に示す。この場合、モード間の相殺の効果によりウェーク関数が最小になる時間 t_{min} は、

$$t_{min} = \frac{1}{2\Delta f} \quad (1.31)$$

である¹。ここでは Δf は隣り合うモードの周波数差である。通常 X-バンド加速管の場合、この周波数差は数 [MHz] 程度であるためこの時間 t_{min} は数百 [nsec] にもなり、JLC のバンチ間隔 $t_b = 1.4$ [nsec] に比べ非常に長い。



(a): キック因子の概念図



(b): 加速管の形状の概念図

図 1.14: 定インピーダンス加速管の概念図。この図では加速管のセル数は少ないが、実際はキック因子のモードの数だけセル数はある。

そこで、JLC のバンチ間隔 t_b と同程度の時間のうちに、モード間の相殺効果によりウェーク関数を非常に小さくする周波数分散構造 [14] が考えられた。この加速管では、加速セルごとに問題となるモードの周波数を積極的に変化させることにより、キック因子の分布の

¹ウェーク関数 W は、
 $W \propto \Im[\frac{1}{2}e^{i(\omega-\Delta\omega)t} + e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{i(\omega+\Delta\omega)t}] = \Im[e^{i\omega t}]\{1 + \cos(\Delta\omega t)\}$
 となる。

拡がりを大きくし、ウェーク関数の減衰時間を非常に短くしている。もし、キック因子の周波数分布をガウス分布

$$\tilde{k}(f) \propto e^{-f^2/2\sigma_f^2} \quad (1.32)$$

とできれば、ウェーク関数はそのフーリエ変換で

$$W(t) \propto e^{-(2\pi\sigma_f t)^2/2} \quad (1.33)$$

となりガウス分布の形で減衰する。ここで、 σ_f はキック因子の分布の標準偏差である。1.4[nsec]後に、ウェーク関数を1/100にするためには $\sigma_f = 0.35$ [GHz]程度にすればよい。

しかし、実際の周波数分散構造は有限個の加速セルから構成されるため、キック因子は連続的なガウス分布とはならず、図 1.15 (a) に示すようにガウス分布に近い離散的で両端が切られた分布となる。このような場合でも、比較的短い時間のウェーク関数はガウス分布の形で減衰するが、次の問題が生じる。

- キック因子の分布は、ガウス分布の両端が切られたような分布になる。したがって、分布の全幅 Δf_{full} を無限が広がらないために、短い時間でウェーク関数が再び増大する¹。しかし、分布の全幅を $\Delta f_{full} = 2$ [GHz]程度にすれば問題が無いことがわかっている [28]。
- キック因子の分布が離散的なので、非常に長い時間でウェーク関数が再び増大する再帰現象が生じる²。再帰現象の生じるまでの時間は、周波数の拡がりを加速管を構成するセル数で割った値の逆数程度である。JLC で考えている X-バンド加速管の場合、その値は約 110[nsec] でありバンチトレインの長さとはほぼ等しくしているため、非常に長い距離でウェーク関数を小さくすることは困難である。

再帰現象によるウェーク関数の増大の問題は残るものの、問題となるモードのキック因子の分布が $\sigma_f = 0.35$ [GHz], $\Delta f_{full} = 2$ [GHz]程度の実際的な加速管は可能である。

このような周波数分散構造は、図 1.15 (b) に示すようにセルごとの形状を少しずつ変化させることにより実現可能と考えられる。本論文は、このような加速管のウェーク場の評価方法についての研究結果をまとめたものである。

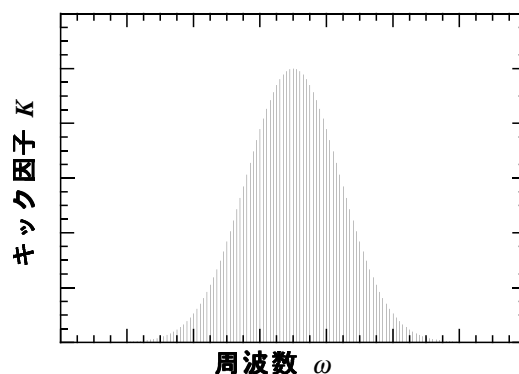
1.3 ウェーク場の計算

1.3.1 単空洞の場合

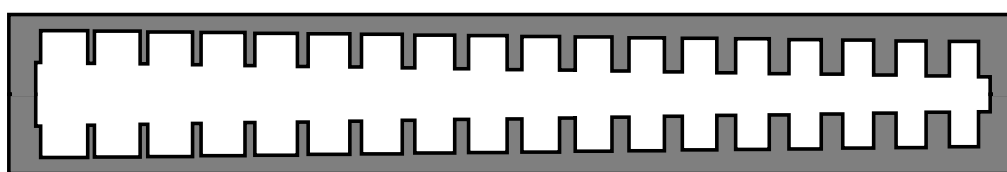
ウェーク場を計算するためには、光速の荷電粒子が構造物を通過する場合のマックスウェルの方程式を解く必要がある。しかし、一般に加速器で用いられている構造物についてそれを解析的に解くことは、境界の形状が複雑であるために不可能である。そのため通常、電磁場を有限の大きさを持つメッシュ領域に分けることにより、マックスウェルの方程式

¹両端が切られたガウス分布のフーリエ変換は、値がゼロになった後、跳ね返りのような増大が生じる。

²詳細は、4.4.2節で述べる



(a): キック因子の概念図



(b): 加速管の形状の概念図

図 1.15: 周波数分散構造の概念図。この図では加速管のセル数は少ないが、実際はキック因子のモードの数だけセル数はある。

を離散化してから、計算機を用いて数値計算をする。離散化されたマックスウェルの方程式を時間領域で計算するコードとして、TBCI [15], ABCI [16], MAFIA [18] 等がある。これらの計算コードを用いて、電荷から後方 s の位置のウェークポテンシャルを計算する場合、空洞の入口から出口にわたって、電荷から後方 s まで電磁場を計算する必要がある。これらのコードでは電荷の近傍の電磁場は比較的容易に計算できるが、距離が離れるに従い大きな空間の電磁場を計算する必要が生じるため、数値計算が困難になる。このことから、これらのコードは短距離ウェーク場の計算には適するが長距離ウェーク場の計算には不向きだといえる。

1.2.2 節に示したようにウェーク関数は、空洞のモードで展開可能であるため、モードごとに周波数とキック因子を計算してそれを重ね合わせることにより求めることができる¹。モードの重ね合わせは、式 (1.7)~式 (1.12) に従う。この方法で短距離ウェーク場を精度良く計算するためには、非常に高いモードまで計算する必要があり困難である²が、長距離ウェーク場では高次のモードは各々相殺するためにその効果は非常に小さくなる³。したがって、長距離ウェーク場を計算するためには適当な数の空洞のモードを計算すれば比較的精度良く求めることができる。

空洞の共振モードを求める代表的なコードとその特徴を表 1.2 に示す。これらのコードを

¹先に示した TBCI 等の計算コードは時間領域で解いていたが、この方法は周波数領域で解くことになる。

²例えば文献 [11] では 416 個のモードを重ね合わせているが、1[psec] 以下の距離では収束が悪い。

³このことは、2.2.1 節で実際に計算を行うことにより示す。

用いると単空洞の長距離ウェーク関数は計算できる。

表 1.2: 空洞のモードを計算する代表的なコード。TRANSVRS, KN7C と本論文のフィールドマッチングは任意のセル間位相差の境界条件が設定できるため、電気/磁氣的短絡面も計算可能である。

項目	MAFIA ver.3.1 (2次元)	MAFIA (3次元)	TRANSVRS KN7C	フィールドマッチング (本論文)
形状の表現	メッシュ	メッシュ	円柱+円環	円柱+円環
加速セルの形状	任意	任意	付録 C 図	付録 C 図
モード	単, 双, 4, ...	単, 双, 4, ...	単 (KN7C) 双 (TRANS.)	単, 双, 4, ...
境界条件 (ディスク孔)	電氣的短絡面 磁氣的短絡面	セル間位相差 電氣的短絡面 磁氣的短絡面	セル間位相差	セル間位相差
計算可能セル数	数セル	数セル	単セル	単セル

1.3.2 多連空洞の場合

加速管のように空洞が複数連結されて共振空洞を形成しているような構造の長距離ウェーク場もまた周波数領域で計算することができる。この場合も、加速管の共振モードを解きそのパラメーター（共振周波数とキック因子）からウェーク場を計算することになる。本小節では、特にリニアコライダーの周波数分散構造の共振モードを計算する方法についてのこれまでの研究を簡単に述べる。

リニアコライダーで考えられている周波数分散構造は、横方向ウェーク場をキャンセルさせるために加速セルごとに双極モードの周波数を変えている。そのために、加速管を構成する 100~200 個の加速セルの形状は、隣り合うセル間で小さいところは μm オーダーで異なり、それら全てが関係して横方向ウェーク場をキャンセルする構造となっている。このような構造をメッシュで表現し、その膨大なメッシュを表現する方程式を精度良く計算することは、現状の計算機の記憶容量や計算スピードでは不可能である。それゆえ、周波数分散構造のウェーク場を計算するためには、これらのコードに代わる新しい方法を開発する必要がある。

SLAC の S. A. Heifets らはフィールドマッチングの方法を用いて縦方向（単極）モード [21] の解析を行い、また最近になって横方向ウェーク場への発展を行った [22] が、キック因子の評価方法が確定しているとは言えない¹。また、計算できる加速セルの形状は、ピル

¹等価回路モデルとのキック因子の比較を行っている。フィールドマッチングではインピーダンスを計算しており、インピーダンスからキック因子に変換する方法に依存して両者の一致の度合いが異なる。

ボックスをビームホールで連結した構造で構成されなくてはならず、実際の加速管の形状とは異なる。他方、Darmstadt 工科大学の U. van Rienen はモードマッチングの方法を用いて同様の形状を仮定して計算している [23]。このモードマッチングのコードは 180 セル程度の形状が全て異なる加速セルから成る加速管の横方向ウェーク場を計算するには至っていない。さらに、等価回路モデルによる解析が SLAC の K. L. F. Bane と R. L. Gluckstern [24] [25] によってなされ、周波数分散構造の特性解明と設計に大きな貢献をしが、現在は同時に取り扱えるモードが現在は 2 個までであり、高次のモードを取り扱うことには困難がある。また、DESY の H. G. Beyer とも等価回路モデルによる解析を行っている [26]。

筆者も本研究の当初は、この等価回路モデルを用いて周波数分散構造の計算を行っていた [27] [28]。そして、より高次のモードを計算することが動機となり、本論文の主題となるオープンモード展開につながった。次節にこの等価回路を用いた方法による周波数分散構造の解析について述べる。

1.4 等価回路モデルからオープンモード展開へ

等価回路モデルで加速管を解析する場合、加速管を各々が共振空洞と考えることができる加速セルが、あるカップリングを介して多数連結して 1 つの共振空洞を形成していると考えられる。このような構造の共振モードの解析には、等価回路モデル [29] を使うことができる。これは、各セルの共振モードを計算 (SUPERFISH, MAFFIA, TRANSVRS 等を用いて) し、セル間の結合を等価回路で表すことにより、加速管全体を表現する。

各セルの共振モードは、ディスク穴での境界条件を設定することにより定義できる (ディスク穴以外の境界条件は金属面である)。この境界条件を設定すると、無限の数のモードが決まり、それを図 1.16 のような等価回路で表す。この図では、回路間のカップリングは書いていないが、実際の加速管では同じセル内でのモード間や隣のセルのモード間とのカップリングがある。等価回路モデルの精度は、このカップリングの取り扱いに依存している。

等価回路モデルの妥当性は、共振回路の周期構造を仮定して進行波のモードを計算し (定インピーダンス加速管の解析と等価)、フィールドマッチングの結果と比べることにより吟味できる。

リニアコライダの加速管の研究では、等価回路を用いて横方向ウェーク場の計算が行われてきた。加速管内の横方向キック因子は、2 章で述べるように HEM_{11} モードが他のモードに比べ 10 倍以上大きい。このことから、このモードを正確に取り扱う方法を開発することを目的に等価回路モデルは発展してきた。その発展の過程を以下に示す。

1.4.1 無結合共振等価回路モデル

研究の最も初期の段階では、各セルのモードが独立したモードと考え、隣のセルのモードとの結合を無視した無結合共振等価回路モデル (Uncoupled Resonator Model) を用いて、ウェーク関数が計算された。このモデルでは、図 1.17 に示すように、各モードは独立した共振器であり、それぞれのモードを特徴づけるパラメーター (周波数とキック因子) を持つ

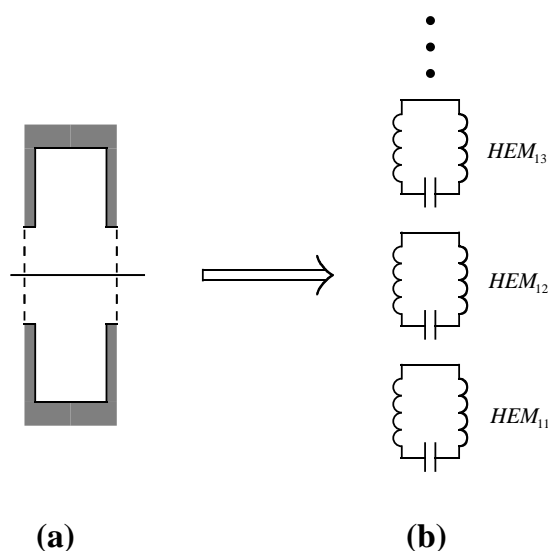


図 1.16: 加速セルと共振回路。(a); 加速管の加速セル、(b); 加速セルの共振モードを表す共振回路。

ている。各モードが独立していると仮定しているので、セルのモードが加速管の共振モードとなる。したがって、ウェーク関数はそれぞれのモードのウェーク関数の重ね合わせとして計算する。このモデルを用いた計算により、リニアコライダーでの周波数分散構造の可能性が示された [14] [7]。

リニアコライダーの加速管のように比較的カップリングが大きい場合、このモデルが示す HEM_{11} モードの分散関係とキック因子を図 1.18 に示す。分散関係は、モード間のカップリングが無いために、 $d\omega/d\beta = 0$ になる。また、セル内のフィールドも一定であるために、キック因子も一定となる。このモデルは加速管のディスク孔が無限に小さいという極限、すなわちカップリングが無い場合は正しいが、カップリングが有るときに生じるセル間位相差や周波数の分散など全く表すことができないので、セル間の結合の効果が現れる程度以降のウェーク関数の評価にこの方法を用いることができない (4.4.3 節参照)。

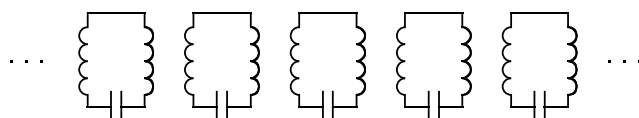


図 1.17: 無結合共振等価回路モデル

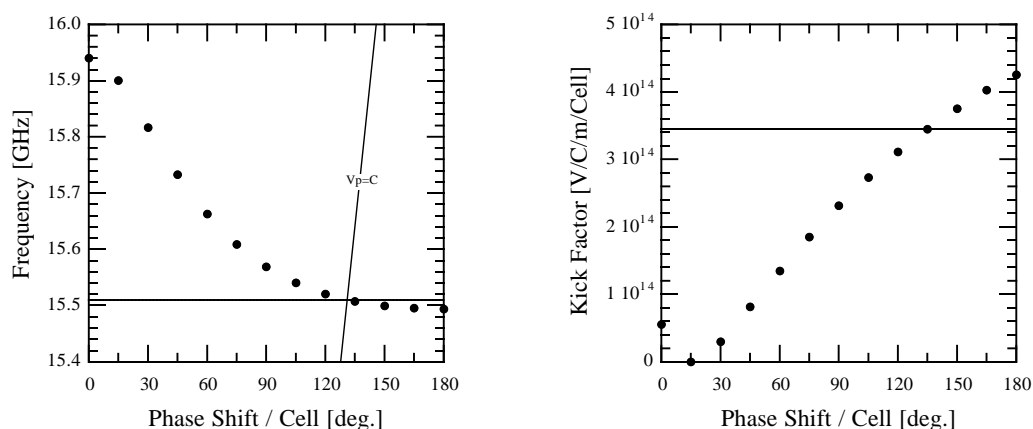


図 1.18: 無結合共振等価回路モデルの分散関係とキック因子。黒丸はフィールドマッチング、実線は等価回路モデルを示す（ディスク孔 $a = 4.5[\text{mm}]$ ）。

1.4.2 単一パスバンド等価回路モデル

研究の次の段階では、リニアコライダーの主線形加速器の加速管でビームとの結合の最も大きい HEM_{11} モードのみに着目し、セル間のカップリングを考慮したモデルである単一パスバンド等価回路モデル (Single Chain Coupled Circuit Model) を用いて周波数分散構造の研究がなされた [24] [25] [27]。

この等価回路モデルを図 1.19 に示す。この図からわかるように、加速セルの一つのモードは隣のセルの同じモードのみ相互作用があると仮定している。

この等価回路を進行波で計算したときの分散関係とキック因子を図 1.20 に示す。この等価回路モデルが示す分散関係は、次式のようなになる。

$$f \approx 1 + \kappa \cos(\phi) \quad (1.34)$$

ここで、 f は周波数、 κ はカップリング定数、 ϕ はセル間位相差である。セル間のカップリングが小さい場合、すなわちディスクの穴径が小さい場合、この式は良い近似である。しかし、カップリングが大きい加速セルの分散関係はこの式とはかなり異なる。また、この等価回路モデルではセル内の電磁場のパターンがセル間位相差に依存しないので、キック因子はほとんど一定である。これもまた、カップリングが小さい場合は比較的良い近似ではあるが、カップリングが大きくなると成り立たなくなる。カップリングが大きい加速管でこのモデルが成り立たない原因は、より高いモードが混入するためである。したがって、高次のモードの効果を取り入れていないこのモデルでは、リニアコライダー加速管のようにカップリングの大きい加速管を取り扱うことに困難が生じる。

1.4.3 二重パスバンド等価回路モデル

単一パスバンド等価回路モデルでは、高次のモードの影響を取り入れることができないため、カップリングの比較的大きい加速管ではモデルの近似が悪い。そこで、SLAC の K.

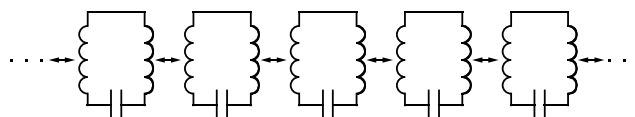


図 1.19: 単一パスバンド等価回路モデル

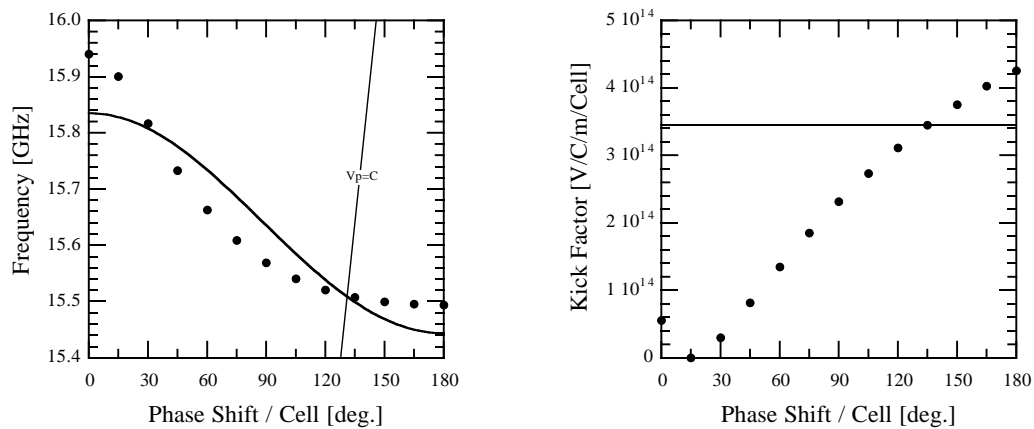


図 1.20: 単一パスバンド等価回路モデルの分散関係とキック因子。黒丸はフィールドマッチング、実線は等価回路モデルを示す（ディスク孔 $a = 4.5$ [mm]）。

L. F. Baneらは、 HEM_{11} モードは主に HEM_{12} モードと結合していることに気づき、図 1.21 に示すような二重パスバンド等価回路モデルを提案した [25]。彼らのモデルは、加速セルはピルボックス空胴（完全円柱）として、それがああるカップリングを介して連なっているものとしている。したがって、セルの共振モードは完全に解析的に解くことができ、この等価回路モデルでは、実際の加速管の HEM_{11} と HEM_{12} に近い TM_{110} と TE_{111} を用いている。すなわち、このモデルでは加速セル内の電磁場をピルボックス空胴の TM_{110} と TE_{111} モードで展開している [図 1.22(a)]。しかし、このようなモードで展開するとキック因子への寄与は TM_{110} のみとなり（ TE_{111} は、 E_z 成分がない）、図 1.23 に示すようにパスバンド全体にわたってのキック因子の振る舞いを正確に表現できない。このことは、最低次のパスバンドの電磁場を級数展開する場合、ピルボックス空胴の TM_{110} と TE_{111} まででは収束が悪いことを示唆している。より正確に電磁場を表現するためには、更に高次のモードを考慮して級数展開を行う必要がある。

K. L. F. Bane らの方法からヒントを得て、筆者らはディスクの中心を境界とするモード [図 1.22(b)] を用いて二重パスバンド等価回路モデルの計算を行った¹。この場合の二重パスバンド等価回路モデルの分散関係とキック因子を図 1.24 に示す。キック因子のフィールドマッチングとの一致は、ディスクの中心を境界としたモードでの展開の方が、ピルボックス空胴での展開よりも格段によい。これより、加速セルの電磁場を展開する場合、ピルボックス空胴よりもディスクの中心を境界とするモードの方が収束が早いと結論できる。しかし、このモードはピルボックス空胴のそれより計算は格段に困難である。

等価回路を二重にすることにより、パスバンド間の干渉も取り扱うことができ、比較的カップリングの大きいリニアコライダーの加速管を計算することができる。しかし、このモデルでは同時に2個のパスバンドしか扱うことができず、さらに高次のパスバンドを計算する場合に困難がある。

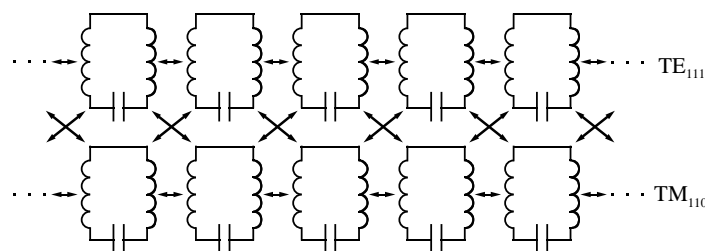


図 1.21: 二重パスバンド等価回路モデル

¹参考文献 [28] [30] では、URMEL [17] を用いて基底モードを計算し、ディスクの先端は丸とした。図 1.24 は、フィールドマッチングを用いてディスクの先端は角である。

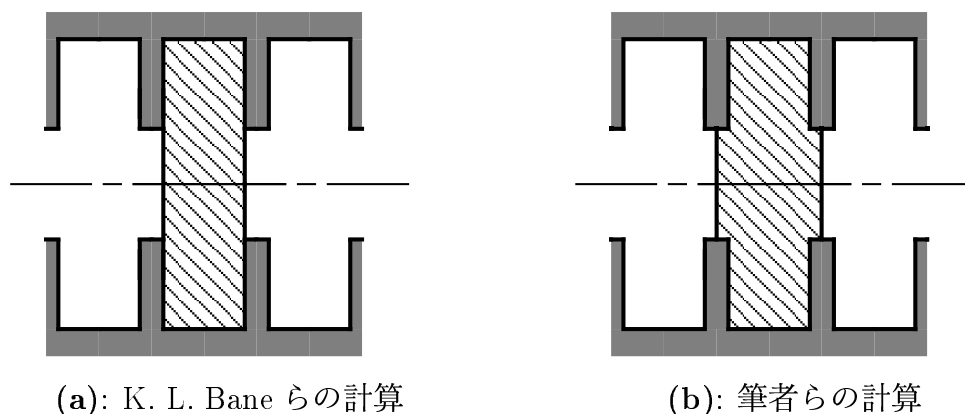


図 1.22: 二重パスバンド等価回路モデルの基底モード。図中、斜め線でハッチングしている部分が展開の基底となるモードの定義域である。

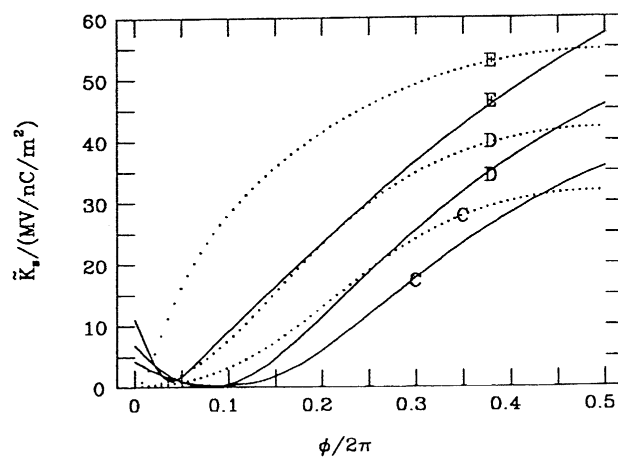


図 1.23: K. L. F. Bane らの二重パスバンド等価回路モデルによるキック因子 (参考文献 [25] より引用)。実線は TRANSVRS の結果、点線は等価回路モデルの結果である。ディスク孔 a は、C; 5.250[mm], D; 4.625[mm], E; 4.000[mm] である。

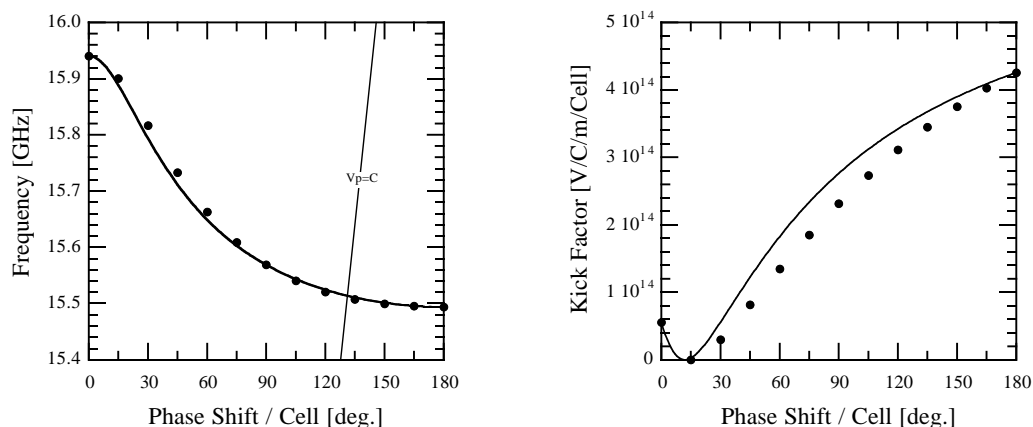


図 1.24: 二重パスバンド等価回路モデルの分散関係とキック因子。黒丸はフィールドマッチング、実線は等価回路モデルを示す（ディスク孔 $a = 4.5$ [mm]）。等価回路モデルの基底関数は、ディスクの中心を境界としている。

1.4.4 オープンモード展開

本研究の動機は、リニアコライダで用いられるような周波数分散構造のウェークフィールドを今までの研究結果よりも更に精度良く計算することだった。そのためには、さらに高次のモードを計算する必要があり、二重パスバンド等価回路モデルが取り扱えるモード数では不足である。それゆえ、より高次のモードを同時に取り扱うことができるオープンモード展開の方法を用いることにした。

U. C. Berkeley の R. M. Bevensee は、加速セルのディスクの中心を磁氣的短絡面とした境界の固有関数（オープンモード）で加速セル内の電磁場を展開する方法を示した [31] [32]。これを等価回路モデルで表現すると、加速セル内のオープンモードが等価回路モデルの共振回路を示し、そして同じセル内のモードと隣接するセルの全てのモードとがカップリングをしていることになる¹。したがって、このオープンモード展開を用いると、より高次（3番目以上）のモードの取り扱いが困難である二重パスバンド等価回路モデルよりもさらに進んだ解析ができる。

R. M. Bevensee は、理論的に周期構造のオープンモード展開の方法を示し、実際、単極モードの最低次の分散関係を 2 個の空洞モードを取り入れて評価し、その有効性を示した。筆者はこの方法を更に以下のように発展させた。

- 横方向モードに適用した。
- 2 個以上の空洞モードで展開を行い、分散関係とキック因子が多くの空洞モードで展開することにより精度が良くなることを示した。
- オープンモード展開の方法を周波数分散構造のような非周期構造に適用する方法を示

¹詳細は、3.4節で述べる。

し、実際に評価を行った。

1.5 研究の目的・方法、及び本論文の構成

1.5.1 目的

リニアコライダーでは、長距離ウェーク場を緩和するために、各々の形状が異なる 100～200 個の加速セルで構成される周波数分散構造が考えられている。この周波数分散構造の長距離ウェーク場を正確に評価する必要があるが、これまでは、確立された有効な方法がなかった。本論文の主題は、セル内の高次のモードの影響も取り入れて、このような構造に対する有効な評価方法を開発することである。

1.5.2 方法

加速管の電磁場を加速セルのオープンモードで展開することにより、加速管全体にわたっての共振モードを計算する。そして、ウェーク場をこの共振モードのパラメーターを用いて計算する。したがって、周波数分散構造の加速管全体にわたっての共振モードを計算する方法を確立することが本研究の最も重要な主題である。

1.5.3 本論文の構成

- 2章 周期構造の双極モードの評価
加速セルのモードと加速管内のモードはセル間のカップリングを介して密接に関連している。ここでは、加速セルの双極モードの計算を行う。
- 3章 周期構造のオープンモード展開
周期構造の電場をオープンモードで展開する方法を求める。そして、セル間のカップリングが大きい加速管に対しても分散関係やキック因子などが、オープンモード展開で精度良く評価できることを示す。
- 4章 非周期構造のオープンモード展開
非周期構造の解析にオープンモード展開を拡張する。これと MAFIA の比較を非周期構造の共振モードを計算することにより行い、両者の一致が良いことを示す。そして、JLC で考えられているような周波数分散構造内のウェーク場の計算を行う。
- 5章 周波数分散構造の双極モードの測定
オープンモード展開の精度確認の1つとして、周波数分散構造の双極モードの測定を行い比較する。

第 2 章

周期構造の双極モードの評価

リニアコライダーのようにバンチがほぼ加速管の中心を通るような場合、縦方向ウェークポテンシャルは単極モードが他の極のモードに比べて圧倒的に優勢である。一方、横方向ウェークポテンシャルは、双極モードが圧倒的に優勢である。リニアコライダーで特に問題となるエミッタンスの増加を引き起こす原因の1つは、加速管の横方向ウェーク場によるビーム不安定性である。したがって、リニアコライダーの加速管を開発するに当たり、双極モードの特性を十分理解することは不可欠である。

リニアコライダーでは、この横方向ウェーク場を抑制するために、双極モードの周波数を適当に分布させた周波数分散構造が考えられている。それを適当に分布させるために、加速セルの形状を加速管の入口から出口にわたって変化させている。このような周波数分散構造の全体にわたって、双極モードを計算することは、困難である(4章参照)。しかし、加速管は加速セルが多数連なり相互作用しているものと考えられることができるので、加速セルとその相互作用を評価し全体を評価することができる。したがって、周波数分散構造を理解し評価するための第一歩は、加速セルの双極モードの性質を十分調べることである。その為には本章では、加速セルの双極モードについて論じる。

2.1 双極モード解析

2.1.1 計算方法

通常、加速セルの共振モードを具体的・定量的に解析する場合は、SUPERFISH [33], URMEL [17], MAFIA [18]などのコードを用いて計算をする。この中で、SUPERFISHは双極モードの計算が不可能であるため、本章の計算に用いることができない。また、URMELやMAFIAの2次元は、双極モードの計算は可能だが、進行波のモードを計算することができない¹(周期的境界条件の設定が不可能)。したがって、これらのコードは同期モード²の計算ができないので、本章の計算に使用できない。一方、MAFIAの3次元は、双極モー

¹MAFIA ver. 3.2では2次元の場合でも周期的境界条件の設定が可能となった。

²電磁場の位相速度が光速の場合、同期モードという。

ドの計算も進行波のモードも可能である。しかし、MAFIAの3次元のメッシュは、直方体で構成されるため、軸対称構造の評価には精度が落ち、また、双極モードにあたるモードにそれ以外の極のモードが混入する可能性がある。実際、数十 [GHz] まで計算した結果、双極モードに他の極のモードが大きく混入した。このことから、これも本章の計算には用いることができない。このような理由で、汎用的に使われているコードには加速セルの双極モードを解析するのに適したものはない。

一方、任意の加速セルの形状は計算できないが、図 2.1 に示すように、円筒と円環で構成されるような加速セルの共振モードを計算するために、単極モードは KN7C [19]、双極モードは TRANSVRS [20] と呼ばれるコードが存在する。これらのコードは、次式のように左端（左側ディスクの中心）と右端（右側ディスクの中心）の境界条件として、任意の位相差を設定できる。

$$\mathbf{E}_L = e^{-i\phi} \mathbf{E}_R \quad (2.1)$$

ここで、 $\mathbf{E}_L/\mathbf{E}_R$ は左/右端の電場である。 ϕ は、セル間位相差で任意の値が設定できる。この境界条件により、周期構造での進行波のモードが計算できる。それ故、位相速度が光速度の同期モードの周波数とキック因子が計算できる。

このコードは図 2.1 中の円筒部分 (I) と円環部分 (II) をそれぞれ直交関数で展開し、それらの境界でのフィールドの連続性を条件に展開係数を決定するのでフィールドマッチングと呼ばれる。このコードでは、ディスクの先端の形状が角という制限があるものの、メッシュを使用したコードに比べ比較的簡単に精度良く計算ができる。そこで、筆者は加速セルを解析するために、KN7C や TRANSVRS と同様のフィールドマッチング（付録 C）のコードを参考文献 [34] に従い作成し、加速セルの解析をした。

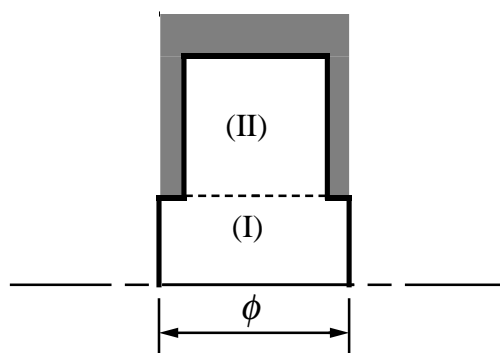


図 2.1: フィールドマッチングの計算形状 (KN7C, TRANSVRS, 本論文のフィールドマッチング)。軸対称の加速セルを領域 (I) は円筒、領域 (II) は円環で表現している。

2.1.2 加速セル形状

加速セルの形状を決めるパラメータは、図 2.2 に示したようにディスク孔半径 a 、加速セル内半径 b 、加速セル長 D 、ディスク厚 t の 4 個である。このうち加速セル長 D は、加速管の加

速モード ($2/3\pi$) とその周波数 f_{acc} (11.424[GHz]) に対応する自由空間波長 $\lambda=26.242$ [mm] により $D = \lambda/3$ と一意的に決まる。また、加速セル内径 b はディスクのパラメーター $\{a, t\}$ に従い加速モードの周波数が $f_{acc}=11.424$ [GHz] となるように決められる。このように本論文では、加速セルの形状の独立したパラメーターをディスクのパラメーター $\{a, t\}$ にとることとした。

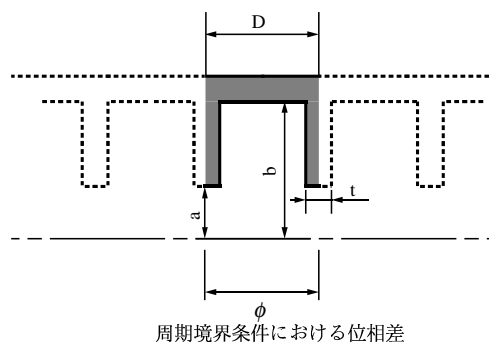


図 2.2: 計算する形状。 a はディスク孔を、 b は 加速セル内径を、 D は加速セル長を、 t はディスク厚を表す。ディスク孔間の境界条件は任意の位相 ϕ である。

2.2 典型的なセルの双極モード

SLAC の Next Linear Collider (NLC) [35] や JLC [2] で考えられている周波数分散構造の形状は、その双極モードの周波数を適当に分布させるために、加速セルのディスクの形状を加速管の入口から出口にわたって適当に変える。JLC の場合、ディスクの形状はディスク厚 t を 1~3[mm]、ディスク孔 a を 3~6[mm] 程度変える予定である。本節では、JLC で用いられる典型的な加速セルとして、ディスク厚 $t=2.0$ [mm]、ディスク孔 $a=4.5$ [mm] の双極モードの分散関係、フィールドパターンとキック因子を計算した結果を示す。また、加速モード ($\phi = 2/3\pi$ [rad]) の周波数を $f_{acc}=11.424$ [GHz] にするために、加速セル長を $D=8.7474$ [mm] とし加速セル内半径を $b=10.779$ [mm] として計算をした。

リニアコライダーでは、横方向ウエーク場によるビーム不安定性が原因となって生じるエミッタンスの増大を許容値以下に抑えるために、後続のバンチの位置でウエーク関数を $\sim 10^{15}$ [V/C/m²] 程度、すなわち $\sim 10^{13}$ [V/C/m/Cell] 程度にする必要がある [36]。したがって、モードの周波数分布がランダムと仮定すると、各モードのキック因子は、この許容値の $1/\sqrt{N} \sim 1/10$ (ここで N は加速管のセル数) 程度、すなわち $\sim 10^{12}$ [V/C/m/Cell] よりも大きいモードは問題となる。

2.2.1 双極モードのキック因子の分布

光速のビームと同期（位相速度が光速）する位相の双極モードについて計算した。得られた 70[GHz] 以下のキック因子、周波数、セル間位相差 ϕ 及び群速度 v_g/c の値を表 2.1に示す。また、500[GHz] 以下のキック因子の分布を図 2.3に示す。図 2.3から、問題となりそうなモードは 100[GHz] 以下に分布していることがわかる。

さらに、最低周波数のモード（ HEM_{11} ）は他のモードに比べて1桁以上キック因子が大きく、 $4.55 \times 10^{16} [V/C/m^2]$ （表 2.1、単位が異なることに注意）である。したがって、後続のバンチの位置でウェーク関数を $1 \times 10^{15} [V/C/m^2]$ 程度にするためには、このモードのウェーク関数を少なくとも 1/100 程度に減衰させる必要がある。

双極モードのウェーク関数 $W_{\perp 1}(t)$ は、式 (1.23) から、次式のように表すことができる。

$$W_{\perp 1}(t) = \sum_n 2\tilde{k}_{\perp 1n} \sin(\omega_{1n}t) \quad (2.2)$$

ここで、 $\tilde{k}_{\perp 1n}$ と ω_{1n} は、それぞれ双極モードのキック因子と周波数である。完全な周期構造の場合、キック因子と周波数は同期モードの値になる¹。図 2.3の結果を用いて、JLC の次のバンチの位置 (1.4[nsec]) 付近のセル当たりのウェーク関数の様子をモードの数 n を変えて調べた。その結果 (図 2.4) から、32 個のモード（周波数 78.833[GHz]）まで足し合わせれば、大体収束することがわかる。したがって、長距離ウェーク場を考える場合、その計算するモードは下から数十個のモードを考えればよい。

¹1.2.2節の式 (1.19) 参照

表 2.1: ディスクロード型 X-バンド加速管の双極同期モードの特性。フィールドマッチングにより、70[GHz]以下の双極同期モードの周波数、セル間位相差、群速度とキック因子を計算した。加速セル形状は、($t=2.0$ [mm], $a=4.5$ [mm], $b=10.779$ [mm], $D=8.7474$ [mm])である。

モード	f_s 周波数 [GHz]	ϕ セル間位相差 [deg.]	v_g/c 群速度	\tilde{k} キック因子 [V/C/m/Cell]
HEM ₁₁	15.496	162.7	-2.2×10^{-3}	3.98×10^{14}
HEM ₁₂	20.792	360-141.5	-3.9×10^{-1}	3.62×10^{12}
HEM ₁₃	25.798	360-89.1	2.4×10^{-2}	4.05×10^{13}
HEM ₁₄	30.560	360-38.9	1.0×10^{-1}	2.98×10^{12}
HEM ₁₅	31.428	360-29.8	-4.1×10^{-2}	2.33×10^{13}
HEM ₁₆	36.242	360+20.6	-4.3×10^{-1}	2.44×10^{13}
HEM ₁₇	39.160	360+51.3	-1.38×10^{-2}	2.90×10^{13}
HEM ₁₈	42.783	360+89.4	1.0×10^{-1}	3.18×10^{12}
HEM ₁₉	45.673	360+119.7	1.7×10^{-1}	2.38×10^{12}
HEM ₁₁₀	45.915	360+122.3	7.5×10^{-2}	2.75×10^{12}
HEM ₁₁₁	48.101	360+145.2	-9.9×10^{-5}	1.42×10^{13}
HEM ₁₁₂	48.357	360+147.9	-1.5×10^{-1}	2.56×10^{11}
HEM ₁₁₃	52.702	720-166.4	-3.1×10^{-1}	4.70×10^{12}
HEM ₁₁₄	54.362	720-148.9	-9.3×10^{-3}	7.52×10^{12}
HEM ₁₁₅	54.929	720-143.0	-2.0×10^{-2}	1.37×10^{13}
HEM ₁₁₆	55.678	720-135.1	2.3×10^{-2}	3.50×10^{11}
HEM ₁₁₇	58.561	720-104.8	-1.5×10^{-1}	8.30×10^{12}
HEM ₁₁₈	60.437	720-85.1	-4.7×10^{-4}	7.13×10^{11}
HEM ₁₁₉	62.083	720-67.8	-8.8×10^{-2}	6.68×10^{10}
HEM ₁₂₀	65.082	720-36.3	1.5×10^{-2}	1.34×10^{11}
HEM ₁₂₁	65.888	720-27.8	-2.3×10^{-2}	3.33×10^{11}
HEM ₁₂₂	67.696	720-8.9	3.9×10^{-2}	1.14×10^{12}
HEM ₁₂₃	69.115	720+5.9	-5.0×10^{-2}	1.75×10^{12}
HEM ₁₂₄	69.680	720+11.9	-2.0×10^{-1}	9.60×10^{11}

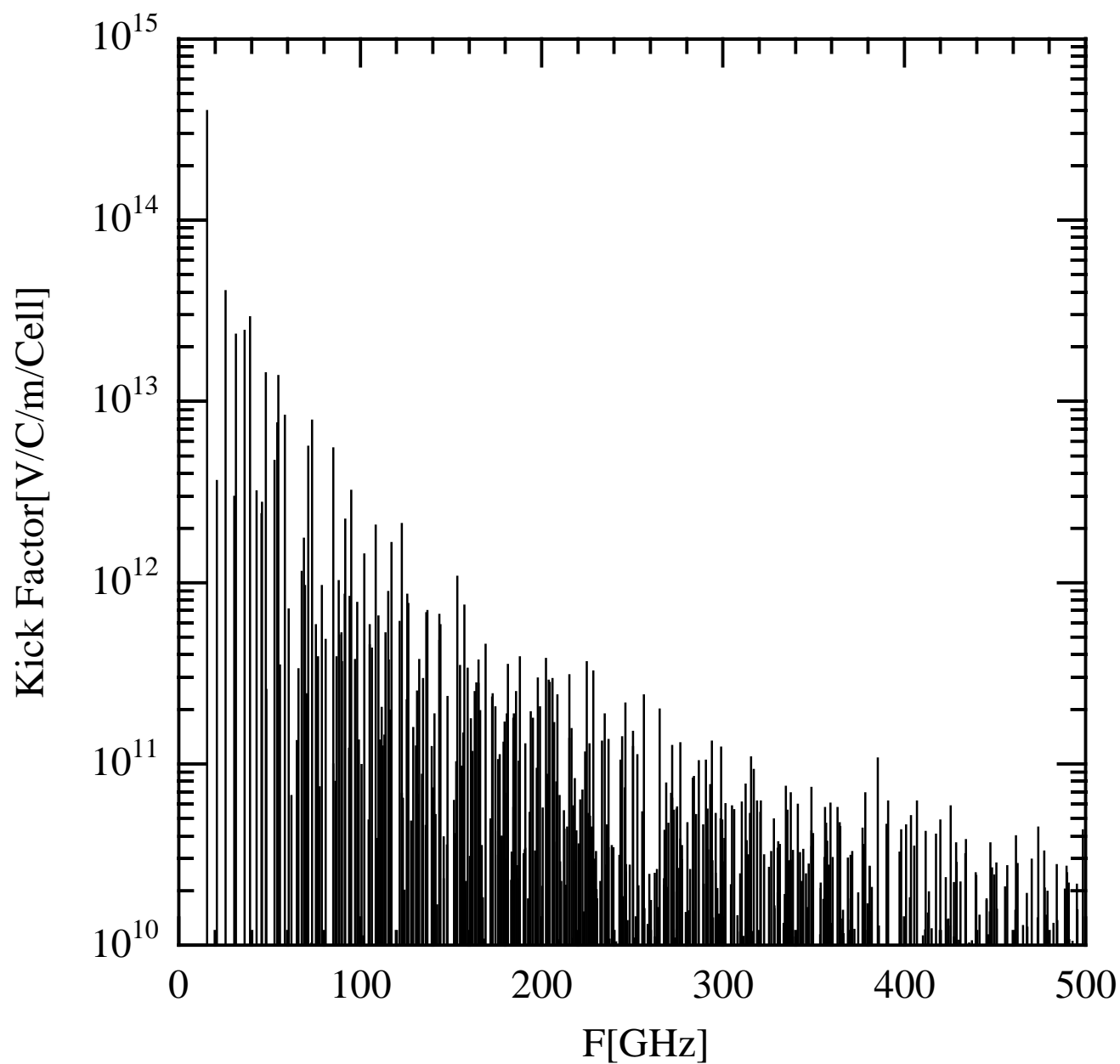


図 2.3: 双極モードのキック因子の分布。フィールドマッチングにより計算されたディスクロード型 X-バンド加速管 ($t=2.0$ [mm], $a=4.5$ [mm], $b=10.779$ [mm], $D=8.7474$ [mm]) の加速セル当たりのキック因子である。500[GHz] まで 1281 個のモードを計算した。

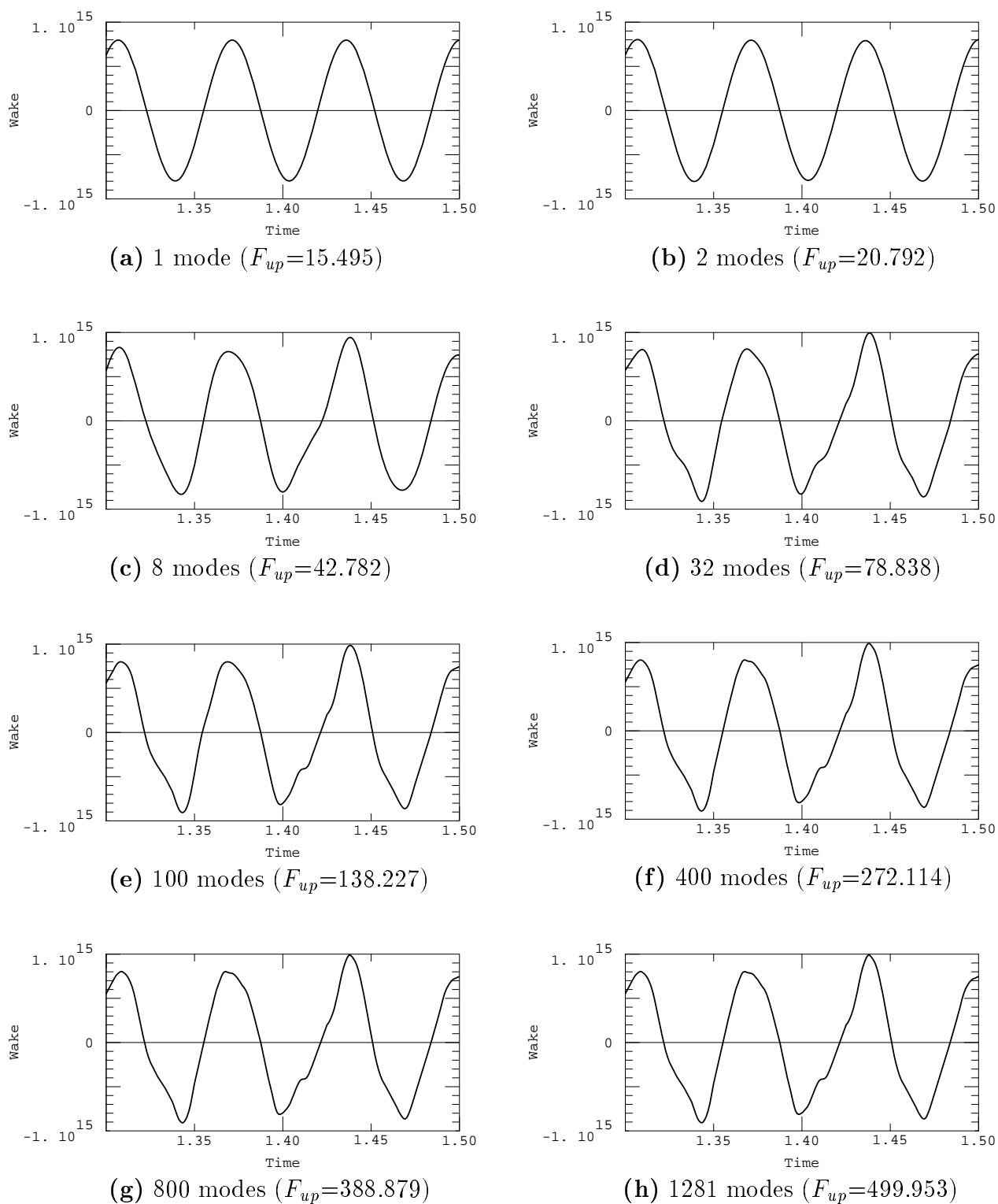


図 2.4: 加速セル ($a=4.5[\text{mm}]$) の次のバンチの位置 ($1.4[\text{nsec}]$) の近傍のウェーク関数。縦軸; ウェーク関数 $[\text{V}/\text{C}/\text{m}/\text{Cell}]$ 、横軸; ウェークを発生するバンチからの位置 (光速 c で割って時間の次元としている) $[\text{nsec}]$ 。また (a)~(h) はモード数を変えて計算をした結果であり、 F_{up} は、最も周波数の高いモードの周波数 $[\text{GHz}]$ である。

2.2.2 双極モードの分散関係

フィールドマッチングにより計算された典型的なセル ($a=4.5[\text{mm}]$, $t=2.0[\text{mm}]$) の双極モードの分散関係を図 2.5 に示す。この図中、一部分散局線が重なっているように見えるところがあるが、実際は重なっていない。このことから、双極モードは縮退しないことがわかる。通常のコイル空洞の場合、TE モード（電場の E_z 成分がない）と TM モード（磁場の H_z 成分がない）に分けることができ、それらのモードは縮退する。しかし、加速セルの場合、両端のディスクの中心に穴が開いているために、2 重極以上のモードでは TE モードと TM モードの縮退は解ける。そして、TE モードと TM モードが混じり合った電磁場分布となり、HEM モードと呼ばれている。

2.2.3 双極モードのフィールドパターン

本論文で用いたフィールドマッチングでは、セル内の電磁場（一般的には進行波）は複素数を用いて書き表している。セル内の実際の電場 $E(\mathbf{r}, t)$ は、次式のように複素電場の実数部分とする。

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, t) &= \Re[E(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \\ &= \Re[E(\mathbf{r})] \cos(\omega t) + \Im[E(\mathbf{r})] \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで、 $E(\mathbf{r})$ はフィールドマッチングで計算される複素電場である。同様に磁場は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}, t) &= \Re[H(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \\ &= \Re[H(\mathbf{r})] \cos(\omega t) + \Im[H(\mathbf{r})] \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

ここで、 $H(\mathbf{r})$ はフィールドマッチングで計算される複素磁場である。以降、本論文ではこれらの式に従い電磁場を複素数で記述する。

フィールドマッチングにより計算された典型的なセル ($a=4.5[\text{mm}]$, $t=2.0[\text{mm}]$) の双極モードの電磁場の分布を付録 D に示す。この付録に示された電磁場は、セル間位相差が $\phi = 0, \pi$ のときの電磁場分布である。この場合、複素電磁場は純実数または純虚数である。そして、一方が純実数ならば他方は純虚数である。それゆえ、この付録で示しているようにセル間位相差が $\phi = 0, \pi$ の場合の電磁場は定在波である。一方、同期モードは一般的に、セル間位相差が $\phi \neq 0, \pi$ であるために、電磁場は進行波であり、純実数または純虚数になることはない。

キック因子が最も大きい HEM_{11} の同期モードの電磁場を図 2.6 に示す。この図から、電場の実数部分と磁場の虚数部分が圧倒的に大きく、その分布はピルボックス空洞の TM_{110} に似ていることがわかる。以降この電場を TM_{110} -like と呼ぶ。この TM_{110} -like の電場は、動径方向 r がディスク孔 a より小さい場所 ($r \leq a$) で、 E_z 成分が大きいためキック因子が大きい。

また、 HEM_{11} の同期モードはセル間位相差 ϕ が π に近く、その電磁場は HEM_{11} のセル間位相差 $\phi = \pi$ （本論文では以降 $\text{HEM}_{11} - \pi$ と表す）の電磁場にもよく似ている（155 ペー

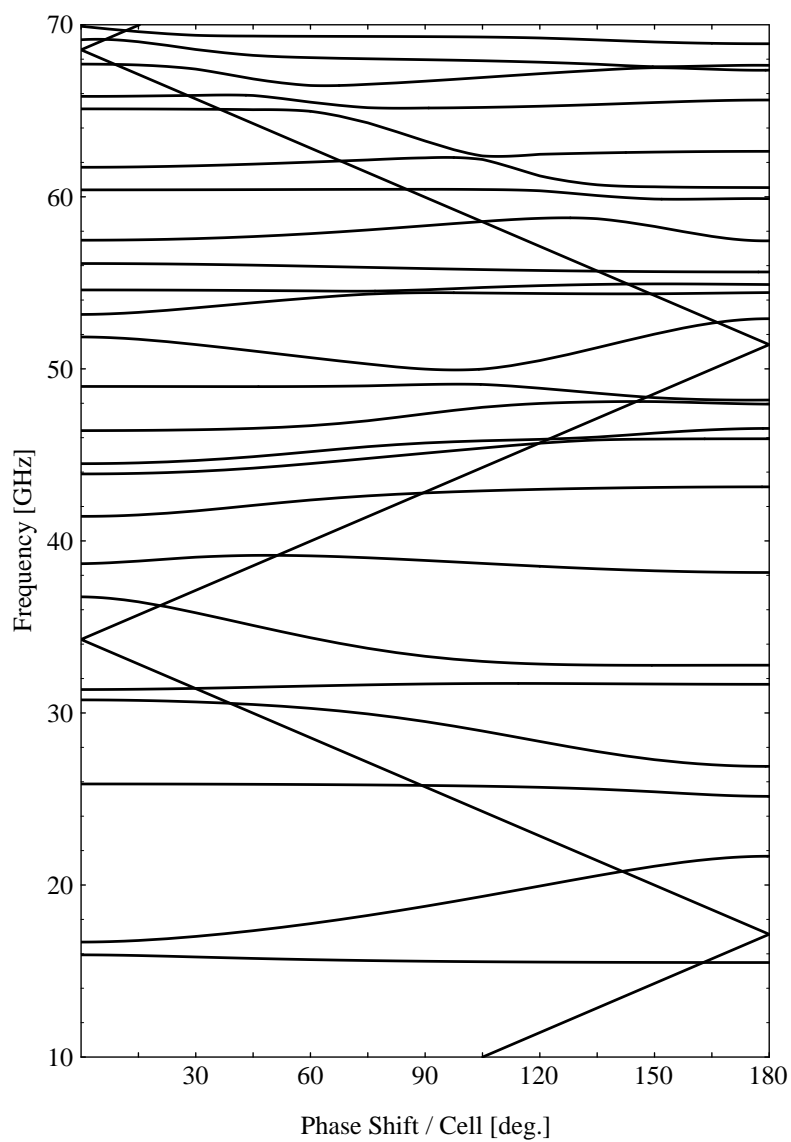


図 2.5: ディスクロード型 X-バンド加速管 ($t=2.0[\text{mm}]$, $a=4.5[\text{mm}]$, $b=10.779[\text{mm}]$, $D=8.7474[\text{mm}]$) の双極モードの分散関係

図 D.4)。このように電磁場分布が似ているために、 $\text{HEM}_{11} - \pi$ と HEM_{11} の同期モードのキック因子は、次節の図 2.9 に示すように近い値になっている。

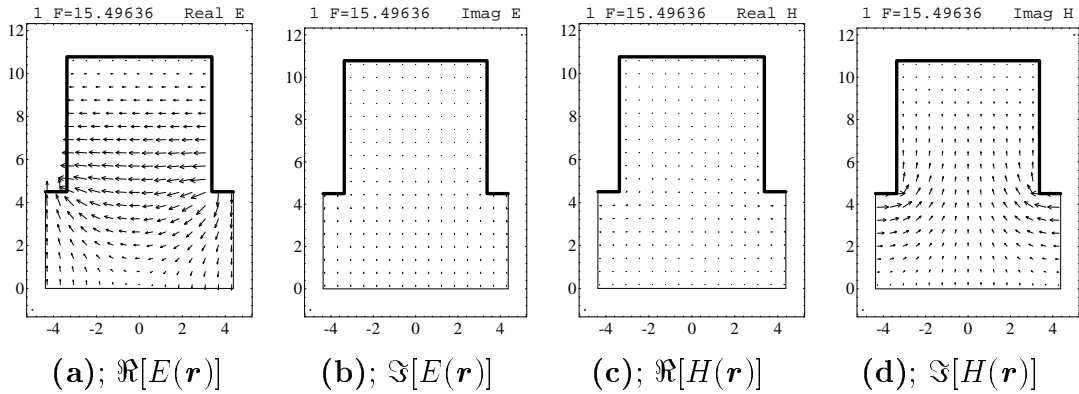


図 2.6: HEM_{11} の同期モードの電磁場分布 ($t=2.0[\text{mm}]$, $a=4.5[\text{mm}]$, $b=10.779[\text{mm}]$, $D=8.7474[\text{mm}]$)。

2.3 双極モードのディスク形状に対する依存性

2.3.1 最低次の双極モード

前小節の計算結果から、最低次のモード (HEM_{11}) のキック因子がほかのモードに比べ大きいことがわかる。したがって、横方向ウェークポテンシャルの成分のかなりの部分をこの最低次のモードが占めている。このことから、加速管の横方向ウェーク場を求める場合、この最低次のモードを最も精度良く評価する必要がある。そのためには、このモードの性質の理解が不可欠である。このような動機から、最低次のモードを詳しく計算した。ディスク厚 $t=2.0[\text{mm}]$ 一定とし、加速モード $\phi = 2\pi/3$ を $11.424[\text{GHz}]$ になるようにセル内径 b を変化させて、ディスク孔 a を $3.0\sim 6.0[\text{mm}]$ まで変化させた場合の分散関係・キック因子・フィールド分布を計算した。

計算した分散関係を図 2.7 に示す。この図から、ディスク孔 a が小さい場合、すなわちセル間のカップリングが小さい場合、 HEM_{11} は TM-like で後進波であり、 HEM_{12} は TE-like で進行波であることがわかる¹。実際、それらの電磁場分布はセル間位相差 $\phi=0, \pi$ ともに、 HEM_{11} は TM_{110} -like、 HEM_{12} は TE_{111} -like である。一方、ディスク孔 a を徐々に広げた場合、 HEM_{11} は後進波から前進波へ変化する。この場合、 HEM_{11} の $\phi=0$ のフィールド分布は、図 2.8 に示すように、ディスク孔 $a=4.0\sim 4.5[\text{mm}]$ で、 TM_{110} -like から TE_{111} -like へ移行し

¹ 双極モードは磁気的カップリングをしている。その場合、TM モードは後進波となり、TE モードは進行波となる。

ている。また、 HEM_{12} の $\phi=0$ のフィールド分布は TE_{111} -likeから TM_{110} -likeへ変わっている。しかし、ディスク孔 a を大きくした場合でも HEM_{11} の $\phi=\pi$ の電磁場分布は TM_{110} -likeであり、 HEM_{12} の $\phi=\pi$ の電磁場分布は TE_{111} -likeでディスク孔 a が小さいときと同じである。

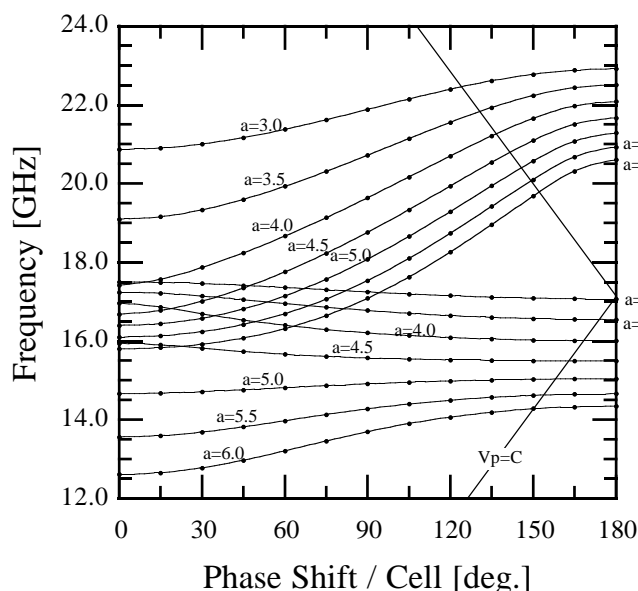


図 2.7: ディスク孔を変えたときの双極モードの分散関係。低次の2個のパスバンド (HEM_{11} と HEM_{12}) を示している。

次に、ディスク孔 a を変えた場合のキック因子の変化を図 2.9に示す。先に述べたようにディスク孔 a が小さい場合、 HEM_{11} の電磁場分布は TM_{110} -likeであり、 HEM_{12} の電磁場分布は TE_{111} -likeである。 TM -likeの電磁場分布は、 TE -likeの電磁場分布に比べ、 E_z 成分が大きいためキック因子は大きくなる。この理由から、ディスク孔が小さい場合、図 2.9に示すように、 HEM_{11} のキック因子は HEM_{12} のそれに比べ大きい。しかし、ディスク孔 $a=4.0\sim 4.5$ [mm]の間で、 HEM_{11} の $\phi=0$ のキック因子は極端に小さくなる。先に示したようにこの領域で、電磁場分布がキック因子の大きい TM_{110} -likeから、キック因子の小さい TE_{111} -likeに変わるためである。他方、 HEM_{12} の $\phi=0$ の場合はその逆である。

このようにディスク孔が比較的大きい加速管の HEM_{11} の電磁場分布は、 TM_{110} -likeと TE_{111} -likeから成り立っている。したがって、このモードを等価回路モデル等で取り扱う場合、これらの2個の電磁場分布を同時に取り扱うものでなくてはならない。K. L. F. Baneらの二重パスバンド等価回路モデルはまさにこの目的のために考えられた。

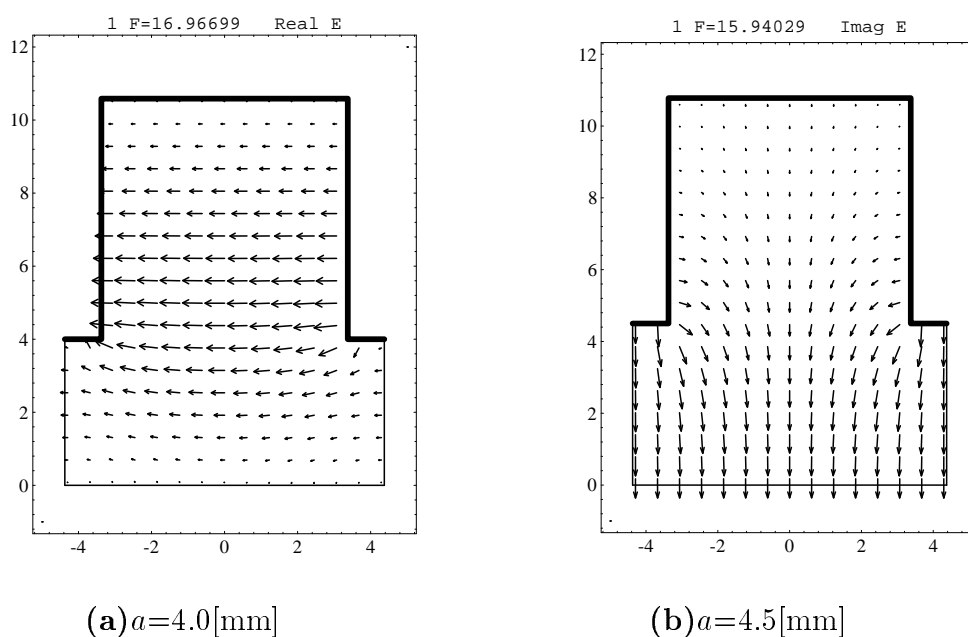


図 2.8: セル間位相差 $\phi=0$ のときの HEM_{11} の電場

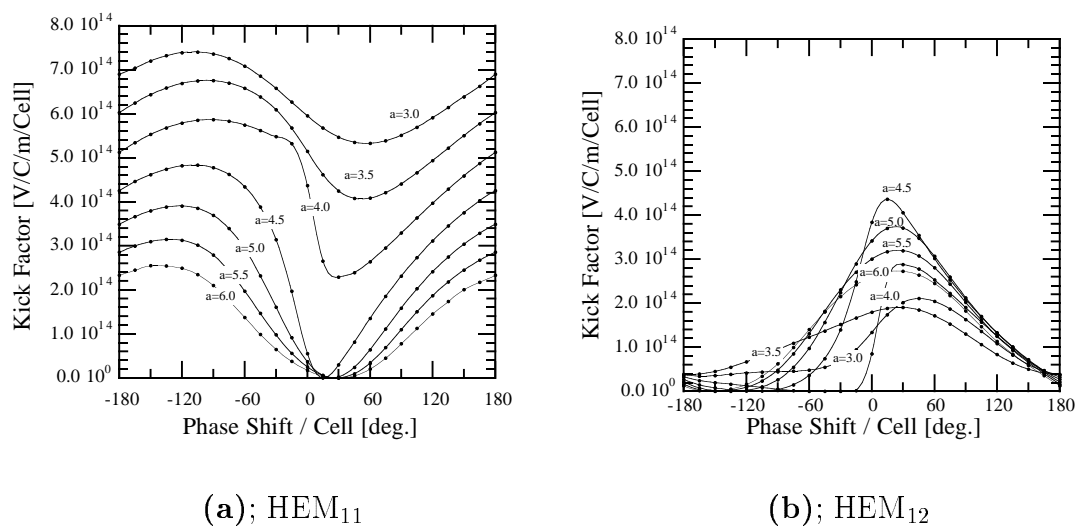


図 2.9: ディスク孔によるキック因子の変化。この場合ディスク厚 $t=2.0$ [mm]。

2.3.2 ディスク厚を変えたときの同期モードのキック因子と周波数

前小節までは、ディスク孔 a を変化させて、キック因子や周波数や電磁場分布の変化を調べた。しかし、加速管を設計するときの独立したパラメーターは、ディスク孔 a だけでなくディスク厚 t も存在するので、これを変えたときの加速セルの特性についても評価する必要がある。そこで、セル内径 b で補償することにより加速モードの周波数を 11.424[GHz] に保ちつつ、ディスク厚を $t=1.0\sim 3.0$ [mm] まで、ディスク孔を $a=3.0\sim 6.0$ [mm] まで変化させて同期モードのキック因子と周波数を計算した¹。その結果を付録 E にまとめて示す。

図 E.2 より、最も横方向のウェーク場の大きい HEM_{11} の同期モードは、周波数・キック因子ともにディスク厚 t の依存性は小さく、ディスク孔 a に依存する。次に比較的キック因子の大きい HEM_{13} (図 E.2) と HEM_{16} (図 E.3) の同期モードの周波数は、ディスク孔 a の依存性は小さく、ディスク厚 t の依存性が大きい。 HEM_{13} の場合、図 D.1 や図 D.4 の 3 番目のモードからわかるように z 方向に対してノードがあるためディスク厚 t の依存性が大きいと考えられる。一方、 HEM_{16} の同期モードはセル間位相差 $\phi = 0$ に近いので (表 2.1, 図 2.5)、その電磁場は図 D.1 の 6 番目のモードに近いと推測できる。この場合も、 z 方向に対してノードがあり、そのためディスク厚 t の依存性が大きいと考えられる。

リニアコライダーのように次のバンチまでにウェーク場を 1/100 程度まで減衰させるためには、 HEM_{11} モードは言うまでもなく HEM_{13} や HEM_{16} モードも十分に減衰させる必要がある。そのための周波数分散構造を形成するためには、 HEM_{11} モードはディスク孔 a を、ほかのモードはディスク厚 t を変化させることにより周波数分布を拡げる必要がある。したがって、リニアコライダーの周波数分散構造の場合、ディスク孔 a 、ディスク厚 t の両方とも加速管の入口から出口にわたって変化させることになる。

¹セル長 D は 8.7474[mm] と固定だから、ディスク厚 t を変えることは、ギャップ長 (ディスク間長) を変えていることになる。

第 3 章

周期構造のオープンモード展開

本章では、同じ形状の加速セルが無限に続く周期構造内の電磁場を固有関数で級数展開する方法を示す。以下に本章の内容を簡単に述べる。

- 3.1節
解くべき方程式であるベクトル波動方程式とその境界条件を示す。
- 3.2節
周期構造内の電磁場（進行波）をパスバンドにわたって、その周期の境界で磁氣的短絡面としたオープンモードを基底関数とした級数展開を表すときの固有値方程式を示す。
- 3.3節
求められた固有値方程式の行列の成分を有限の数の基底関数を用いて直接計算する。無限個のオープンモードで電場を級数展開すれば固有値方程式の行列はエルミートになるが、実際の数値計算では有限個のオープンモードで展開するためこれは非エルミートになる。この場合、得られる解の中には、対象が無損失にもかかわらず周波数に虚数成分が含まれるなどの矛盾が起きる場合がある。特にカップリングの大きい加速セルや多くのモードを取り入れて計算する場合にこの問題が生じる。
そこで、無限次元の空間から有限次元で閉じるような部分空間を取り出す近似を行い、行列をエルミートにすると矛盾無く計算できることを示す。
- 3.4節
カップリングが小さい場合、このオープンモード展開は等価回路モデルと等しいことを示す。

3.1 電磁場の方程式

ここで取り扱う空洞ではその内部には電流も電荷も無かつ空洞壁は無損失境界と仮定するので、マクスウェルの方程式は同次波動方程式になる。すなわち、空間 r と時間 t の

関数である周期構造内の電場ベクトル $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, 磁場ベクトル $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ は、次式のベクトル波動方程式を満足する。

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (3.1)$$

ここで、変数分離をするために時間の項について次式のようにフーリエ変換を行う。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (3.2)$$

すると、空間と時間の両方の微分方程式であった式(3.1)は、次式のように周波数領域での偏微分方程式になる。これが、許される境界条件のもとで固有関数展開の方法を用いて解くべき方程式である。

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega_i) &= \frac{\omega_i^2}{c^2} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega) \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, \omega_i) &= \frac{\omega_i^2}{c^2} \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, \omega_i)\end{aligned}\quad (3.3)$$

実際には、この電磁場の偏微分方程式を全ての領域（無限に長い周期構造の全ての領域）にわたって解くことはできない。しかし、周期構造内ではフロケの定理が成り立つので、1周期分から全ての領域の電磁場がわかる。したがって、周期構造では1周期分のみを解けばよい。ある任意の1周期の電磁場 $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_\perp, z)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}_\perp, z)$ からその周期の長さ p の n 周期分離れた場所での電磁場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z + np)$, $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}_\perp, z + np)$ は、周期ごとの位相変化 ϕ とその振動数 ω を用いて次式のように記述できる。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z + np) e^{i(\omega t)} &= \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z) e^{i(\omega t - n\phi)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}_\perp, z + np) e^{i(\omega t)} &= \mathbf{H}(\mathbf{r}_\perp, z) e^{i(\omega t - n\phi)}\end{aligned}\quad (3.4)$$

したがって、周期構造内の電磁場を計算する問題は、周期ごとの位相変化に対して周波数と1周期内の電磁場を求める問題に還元される。それゆえ、式(3.3)を解く領域は図3.1に示すように周期構造内の任意の1周期分である。加速管ではこの1周期は加速セルと呼ばれている。これで、解くべき方程式(3.3)と定義域がきまったので境界条件をきめれば電磁場が計算できる。完全導体であるセル壁の境界条件は次式のようになる。

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \times \mathbf{n} &= 0 \quad (\text{セル壁}) \\ \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad (\text{セル壁})\end{aligned}\quad (3.5)$$

ここで、 \mathbf{n} は境界の外向き法線方向の単位ベクトルである。左右のディスク孔の境界条件は、式(3.4)より次式のようになる。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, \text{Right}) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, \text{Left}) e^{-i\phi} \quad (\text{ディスク孔}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}_\perp, \text{Right}) &= \mathbf{H}(\mathbf{r}_\perp, \text{Left}) e^{-i\phi} \quad (\text{ディスク孔})\end{aligned}\quad (3.6)$$

これで境界条件が全てきまったので、方程式 (3.3) を加速セルの領域で計算することにより、周期構造内の電磁場がわかる。

更に、計算の簡単化のために、これらの電磁場を次式のように解くべき領域にわたっての電磁場の内積の積分が1になるように規格化しておく。

$$\begin{aligned} \int \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega_i) \cdot \mathbf{E}_j^*(\mathbf{r}, \omega_j) dv &= \delta_{ij} \\ \int \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, \omega_i) \cdot \mathbf{H}_j^*(\mathbf{r}, \omega_j) dv &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.7)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーの記号である。これらの規格化条件とマックスウェルの方程式より、磁場と電場は次式の関係で結ばれる。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega_i) &= -i \frac{\omega_i}{c} \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, \omega_i) \\ \nabla \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, \omega_i) &= i \frac{\omega_i}{c} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega_i) \end{aligned} \quad (3.8)$$

これらの関係式より、電場あるいは磁場の一方がわかれば他方が計算できる。したがって、本論文では電場を式 (3.3) に従い計算し、そして磁場は式 (3.8) に従い計算する。

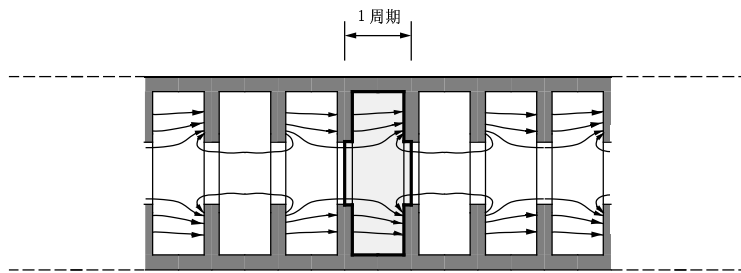


図 3.1: 周期構造内の計算領域。周期構造内に電場がある様子を示している。この電場を太線で囲まれた1周期分の領域でマックスウェルの方程式を計算する。

これらの条件のもとでの式 (3.3) の解である、電磁場 \mathbf{E} , \mathbf{H} と角振動数 ω_i は次のような特徴を持っている。

- 任意のセル間位相差 ϕ の解は無数個存在する。すなわち、加速セル内には無数個のモードが存在することを示し、これらのモードは周波数の低い方から順に番号付けができる。
- 角振動数 ω_i は図 3.2 に示すようにセル間位相差 ϕ に対して連続的に変化する。それらの関係は、分散関係と呼ばれている。セル間位相差が $\phi = 0, \pi$ の場合、その変化する割合は $\partial\omega/\partial\phi = 0$ となる。これは、そこでは群速度 v_g がゼロとなることを示している。そして、 $\phi = 0$ と π の間が解としての角振動数 ω_i が存在できる領域であるバンドである。

- $\phi = 0, \pi$ の場合、解である電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{H} は純実数（あるいは純虚数）とすることができる。これは、その電磁場が定在波であることを示している。
- $\phi \neq 0, \pi$ の場合、解である電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{H} は複素数である。これは、その電磁場が進行波であることを示している。

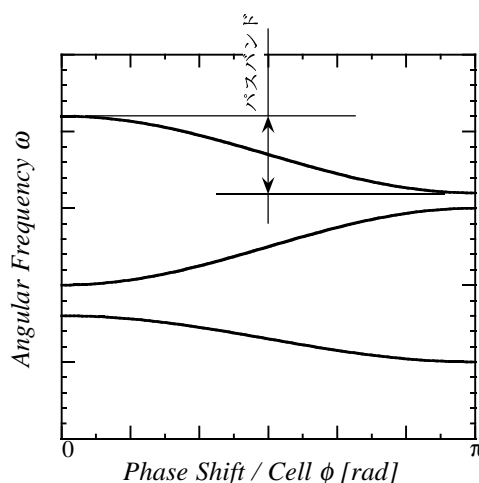


図 3.2: 周期構造内の分散関係

3.2 周期構造内の電磁場の固有関数展開

本節では、無限周期構造の加速セル内の電磁場を固有関数で級数展開する方法を示す。この方法では、加速管内のマックスウェルの方程式（ベクトル波動方程式）は固有値方程式に書き直される。級数展開の係数はこの固有値方程式の固有ベクトル、周波数は固有値として計算される。本節ではこの固有値方程式を表す行列の表式を決め、その性質を調べる。

ここで級数展開するときの基底関数は、加速セルの両側のディスク孔を磁氣的短絡面としたオープンモードを用いる。理論的に周期構造内の電磁場をオープンモードで展開する方法は、R. M. Bevenssee によって示され [31][32]、彼の論文や教科書を参考にして本研究を行った。しかし、実際これらの文献で示されているのは加速セルの電磁場を2個のオープンモードで展開し、その分散関係を示すことまでである。本研究では、このオープンモード展開を次に示すように発展させた。

• 3章

比較的セル間のカップリングの大きい場合に必要となる2個以上のモードを取り入れて計算できるようにした。

• 4章

非周期構造に適用できるようにした。

3.2.1 基底固有関数

一般に空洞内の電場（ベクトル関数）は、無数に存在する直交ベクトル関数系の中の任意の1つで級数展開できる。この展開係数を数値計算する場合、精度および計算時間を考慮すると展開係数が最も早く収束する関数系を選ぶ方が有利である。そうなるように、級数展開するときの基底関数を定義する。

本節では、周期構造内の1個の加速セルの領域の電場 $\mathbf{E}[\mathbf{r}, \omega_i(\phi)]$ をある直交ベクトル関数系 \mathbf{e}_j でそのパスバンドにわたって級数展開する。

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}, \omega_i(\phi)] = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\phi) \mathbf{e}_i(\mathbf{r}) \quad (3.9)$$

ここで、 $a_i(\phi)$ は展開係数である。基底関数 $\mathbf{e}_i(\mathbf{r})$ が満たす方程式は、解が直交ベクトル関数系を形成し、そして電場を級数展開した場合その展開係数の収束が早いものを選択する。このような基準を課すと、電磁場と同じ方程式の関数系を選択するのが適当である。したがって、級数展開の基底直交ベクトル関数系 \mathbf{e}_a は、次の微分方程式を満たすものを用いる。

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{e}_a = \left(\frac{\omega_i}{c}\right)^2 \mathbf{e}_a \quad (3.10)$$

このような、微分方程式を満たす関数は固有関数と呼ばれ、それは付録Bに示すように直交ベクトル関数系を形成している。また、定数 $(\omega_a/c)^2$ は固有値と呼ばれているものである。

満たすべき方程式が決まったので、定義域・境界条件を決めることにより基底関数は完全に定義できる。その定義域は、直交ベクトル関数系を用いて級数展開する上で最も簡単な領域を選ぶべきである。ゆえに、その関数系の定義域は、級数展開する領域と全く同じ領域である図3.3に示す周期構造の1周期とする。

残りの境界条件を決めればこの固有関数系は完全定義できる。級数展開の収束を早めるためにはセル内の電場と同じ境界条件を課するのがよい。ここで、境界条件をセル壁とディスク孔部分に分けて考える。セル壁部分では、電場と同じ境界条件とする。すなわち、固有関数 \mathbf{e}_a のその場所でのベクトルがセル壁の法線方向になるようにする。

$$\mathbf{e}_a \times \mathbf{n} = 0 \quad (\text{セル壁}) \quad (3.11)$$

ディスク孔部分の境界条件は、通常電磁場の境界条件を決定することの類推から、次に示す2通りが考えられる。

- ディスク孔間の位相差が ϕ の場合（周期境界条件）

ディスク孔部の固有関数のベクトル値が左右で、任意の位相差 ϕ 異なるように境界条件をきめる。すなわち、左側の境界の関数の値を $\mathbf{e}_a(\text{left})$ とし、そして右側のそれを $\mathbf{e}_a(\text{right})$ とすると次式で表される。

$$\mathbf{e}_a(\text{left}) = e^{i\phi_0} \mathbf{e}_a(\text{right}) \quad (3.12)$$

この場合、固有関数はこの周期構造の加速セル当たりの位相差 ϕ_0 のときの電場と同じになる。図3.4の×印に示したような部分がこの境界条件を満たす直交関数系である。

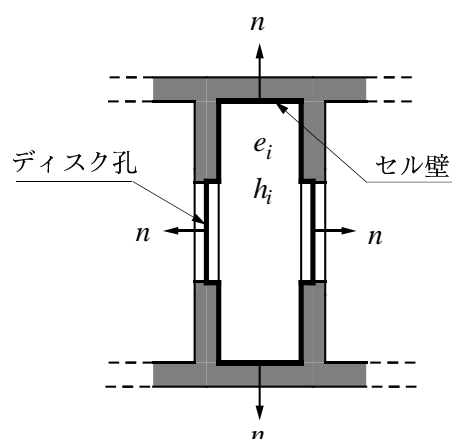


図 3.3: 周期構造の電磁場を固有関数展開するときの固有関数の定義域。固有関数 e_i, h_i の定義域は図中の太線で囲まれた部分である。境界の法線 \mathbf{n} は、定義域の外向きである。

これからもわかるように、この関数系を基底として級数展開をすることは、ある特定の進行波（セルごとの位相差 ϕ_0 ）で周期構造の全ての分散曲線上の電磁場を展開することに相当する。この関数系では、 $\phi = 0, \pi$ のみ純実数（または純虚数）とすることができ（この場合は定在波）、ほかの場合は複素数である。

- ディリクレ (Dirichlet) またはノイマン (Neumann) の境界条件

ディスク孔部での境界条件を電磁場のときの境界条件である磁氣的短絡面、または電氣的短絡面と同様にする。すなわち、境界でのベクトル関数の値を $\mathbf{e}_a(\text{iris})$ 、境界の法線方向を \mathbf{n} とした場合次式を満たすようにする。

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a(\text{iris}) \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad (\text{磁氣的短絡面, ディリクレ条件}) \\ \mathbf{e}_a(\text{iris}) \times \mathbf{n} &= 0 \quad (\text{電氣的短絡面, ノイマン条件}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

図 3.4 に示した分散関係の中でこの固有関数は、左右のディスク孔部での境界条件が同じならば、 $\phi = 0$ または π の上にある。言い換えれば、加速セルのオープンモードまたはショートモードの場合と同じになる。左右の境界条件が異なる場合は、 $\phi = \pi/2$ と $\phi = -\pi/2$ の電場を足し合わせたものと同じものになる。これも言い換えれば、 $\pi/2$ モードの場合と同じである。これらの関数系を基底として級数展開をすることは、ある特定の定在波（ $0, \pi$ または $\pi/2$ モード）で周期構造の全ての分散曲線上の電磁場を展開していることに相当する。この場合固有関数の値は、純実数（または純虚数）とすることができる。

これら進行波または定在波の固有関数で周期構造内の電磁場は展開できるが、どちらも全てのパスバンドにわたって展開係数の収束が他より勝っているとは言えない。選択した固有関数の境界条件が実際の電場のそれに近ければ収束が早いし、そうでなければ収束は

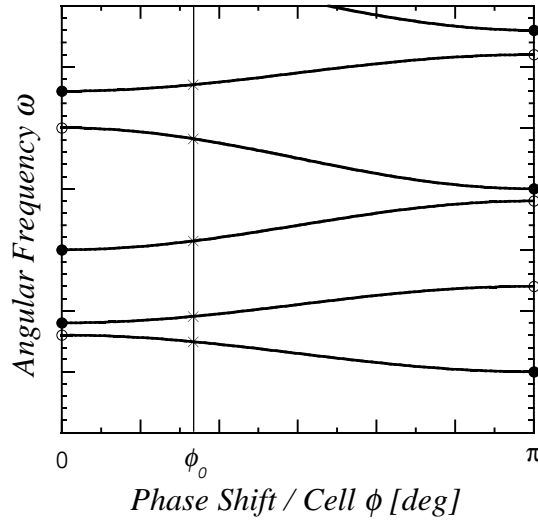


図 3.4: 境界条件と分散関係上でのモードの位置。●; オープンモード、○; ショートモード、×; セル間位相差 ϕ_0 をそれぞれ表す。双極モードのようにセル間が磁気結合の場合、後進波の $\phi = \pi$ がオープンモードに $\phi = 0$ がショートモードに、進行波の $\phi = \pi$ がショートモードに $\phi = 0$ がオープンモードになる。

遅いであろう。したがって、ディスク孔部の固有関数の境界条件の決定には、まだ任意性が残っている。よって、次節で示すように実際に固有関数展開の表式を求める際、できるだけ式が単純になる境界条件を選択する方がよいであろう。

この固有関数 e_a にも、あるモードの電場に対して磁場に相当するような固有値が等しく境界条件の異なる固有関数 h_a が存在する。これらの固有関数もまた式 (3.8) と同様の関係式である次式を満足する。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{e}_a &= \frac{\omega_a}{c} \mathbf{h}_a \\ \nabla \times \mathbf{h}_a &= \frac{\omega_a}{c} \mathbf{e}_a \end{aligned} \quad (3.14)$$

固有関数 e_a は定義域にわたっての内積が1になるように規格化する。式 (3.14) に従い固有関数 h_a も同様に1に規格化される。

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j^* dv &= \delta_{ij} \\ \int_V \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_j^* dv &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2.2 加速セル内の方程式

前節で述べたような固有関数を用いて、加速セル内の電場を表す方程式をきめる。そのために次式に示すベクトル恒等式を用いる。

$$\int_V (\mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) dv = \int_S (\mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.16)$$

この恒等式のベクトル \mathbf{A} に前小節で述べたような固有関数系の i 番目の固有関数 $\bar{\mathbf{e}}_i$ を、ベクトル \mathbf{B} には加速セル内の電場 \mathbf{E} を代入する。

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{e}}_i^* \quad (3.17)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{E} \quad (3.18)$$

式 (3.8), (3.14) を用いて変形すると、ベクトル恒等式は次のようになる。

$$\left\{ \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{\bar{\omega}_i}{c} \right)^2 \right\} \int_V \bar{\mathbf{e}}_i^* \cdot \mathbf{E} dv = \int_S \left(\frac{\bar{\omega}_i}{c} \mathbf{E} \times \bar{\mathbf{h}}_i^* + i \frac{\omega}{c} \bar{\mathbf{e}}_i^* \times \mathbf{H} \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.19)$$

式 (3.19) は、マックスウェルの方程式とベクトル恒等式から導かれた近似の無い厳密に正しい式である。ここで、固有関数 $\bar{\mathbf{e}}_i$ のディスク孔部での境界条件は、まだ決まってないので任意に選ぶことができる。そこで、この式を簡単にするために、すなわち右辺第2項を消去するために、固有関数 $\bar{\mathbf{e}}_i^*$ の左右のディスク孔部での値 $\bar{\mathbf{e}}_i(L)^*$, $\bar{\mathbf{e}}_i(R)^*$ は、法線方向成分のみとする。すなわち、固有関数 $\bar{\mathbf{e}}_i$ のディスク孔部での境界条件は、次式を満足するものを選ぶ。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_i^*(L) \times \mathbf{n} &= 0 \\ \bar{\mathbf{e}}_i^*(R) \times \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

このような境界条件はノイマン条件と呼ばれ、丁度ディスク孔部を完全導体としたときの電場の境界条件と同じである。本論文では、このような固有関数をショートモードと呼ぶ。ショートモードの場合、もう一方の固有関数 $\bar{\mathbf{h}}_i^*$ の左右のディスク孔部での値 $\bar{\mathbf{h}}_i(L)^*$, $\bar{\mathbf{h}}_i(R)^*$ は、式 (3.14) から、法線方向成分はゼロとなる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{h}}_i^*(L) \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \bar{\mathbf{h}}_i^*(R) \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

式 (3.19) の固有関数 $\bar{\mathbf{e}}_i$ をショートモードとした場合、右辺2項はゼロになる。すなわち、

$$\left\{ \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{\bar{\omega}_i}{c} \right)^2 \right\} \int_V \bar{\mathbf{e}}_i^* \cdot \mathbf{E} dv = \int_S \left(\frac{\bar{\omega}_i}{c} \mathbf{E} \times \bar{\mathbf{h}}_i^* \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.22)$$

である。この式は、全ての i について成り立っている。セル壁でのセル内の電場 \mathbf{E} の成分はその法線方向だけであるから、式 (3.22) の右辺の面積分はディスク孔のみとなる。ま

た、ディスク孔でのショートモード $\bar{\mathbf{h}}_i^*$ は、法線ベクトル \mathbf{n} と直交している。したがって、式 (3.22) は次のように書き表せる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{\bar{\omega}_i}{c} \right)^2 \right\} \int_V \bar{\mathbf{e}}_i^* \cdot \mathbf{E} dv \\ &= \frac{\bar{\omega}_i}{c} \left[\int_L \{ \mathbf{E}_\perp(L) \times \bar{\mathbf{h}}_i^*(L) \} \cdot \mathbf{n}_L dS + \int_R \{ \mathbf{E}_\perp(R) \times \bar{\mathbf{h}}_i^*(R) \} \cdot \mathbf{n}_R dS \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

ここで、 $\int_L dS$ と $\int_R dS$ は左右のディスク孔での面積分を、 $\mathbf{E}_\perp(L)$ と $\mathbf{E}_\perp(R)$ は左右のディスク孔での電場の法線ベクトル \mathbf{n} と垂直方向の成分を、 $\bar{\mathbf{h}}_i^*(L)$ と $\bar{\mathbf{h}}_i^*(R)$ はショートモード $\bar{\mathbf{h}}_i^*$ の左右のディスク孔での値を、 \mathbf{n}_L , \mathbf{n}_R は左右のディスク孔での法線ベクトルをそれぞれ表す。

次に、加速セル内の電場 \mathbf{E} を前小節で述べたような固有関数 \acute{e}_j (ただし、ディスク孔部の境界条件はまだ決まっていない) を基底として級数展開を行う。

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \acute{e}_j \quad (3.24)$$

ここで、 a_j は j 番目の固有関数の成分を表す展開係数である。式 (3.23) の右辺の面積分を正しく評価するためには、級数展開に用いる基底関数 \acute{e}_i は、境界の法線と垂直な成分が必要である。このような固有関数の最も単純なものは、ディスクの境界でのベクトルが法線と垂直なものである。この固有関数を本論文では、オープンモードと呼ぶ。本論文では、電場 \mathbf{E} をこのオープンモードで展開する。ディスク孔では、オープンモード \acute{e}_i には法線ベクトル \mathbf{n} と平行な成分は無いので、左右のディスク孔の垂直方向電場は、次式のように級数展開できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp(L) &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j \acute{e}_j(L) \\ \mathbf{E}_\perp(R) &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j \acute{e}_j(R) \end{aligned} \quad (3.25)$$

ここで、 $\acute{e}_j(L)$, $\acute{e}_j(R)$ は、左右のディスク孔でのオープンモード \acute{e}_j の値である。

以降、ここで定義された固有関数 $\bar{\mathbf{e}}_i$, $\bar{\mathbf{h}}_i$, \acute{e}_j , \acute{h}_j を用いて、級数展開の成分 a_i と周波数を求める式を導く。その前に、本論文で計算に用いている固有関数の境界条件を以下にまとめる。

ショートモードの固有関数

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_i \times \mathbf{n} &= 0 && \text{セル壁} \\ \bar{\mathbf{e}}_i \times \mathbf{n} &= 0 && \text{ディスク孔} \\ \bar{\mathbf{h}}_i \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{セル壁} \\ \bar{\mathbf{h}}_i \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{ディスク孔} \end{aligned} \quad (3.26)$$

オープンモードの固有関数

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{e}}_i \times \mathbf{n} &= 0 && \text{セル壁} \\
 \dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{ディスク孔} \\
 \dot{\mathbf{h}}_i \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{セル壁} \\
 \dot{\mathbf{h}}_i \times \mathbf{n} &= 0 && \text{ディスク孔}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

式(3.23)の右辺の面積分を考える。 n 番目のセルの右側のディスク孔での電場 $\mathbf{E}_\perp(n, R)$ は、 $n+1$ 番目のセルの左側のディスク孔での電場 $\mathbf{E}_\perp(n+1, L)$ に等しい。加えて、周期的境界条件により、セルの番号が1つ増えるに従い位相が ϕ 進む。これらこのことから、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_\perp(n, R) &= \mathbf{E}_\perp(n+1, L) \\
 &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}_\perp(n, R) + \mathbf{E}_\perp(n+1, L) \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}_\perp(n, R) + \mathbf{E}_\perp(n, L) e^{-i\phi} \}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

そして、これらの左右のディスク孔での電場は、式(3.25)からオープンモードにより展開できる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_\perp(n, R) &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_j \dot{\mathbf{e}}_j(R) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \dot{\mathbf{e}}_j(L) e^{-i\phi} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \{ \dot{\mathbf{e}}_j(R) + \dot{\mathbf{e}}_j(L) e^{-i\phi} \}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

オープンモードとショートモードの定義域は z 方向の中心を基準として対称であるため、その関数値(ベクトル)は対称または反対称の対称性を持っている。ここでは、オープンモード $\dot{\mathbf{h}}_j$ とショートモード $\bar{\mathbf{h}}_i$ の横方向成分が対称/反対称のときそれぞれ対称/反対称モードと呼ぶことにする。対称/反対称モードのとき、オープンモード $\dot{\mathbf{e}}_j$ とショートモード $\bar{\mathbf{e}}_i$ の横方向成分は反対称/対称になる。この様子を図3.5に示す。このようなモードの対称性を表すために次の量を定義する。 i 番目のオープンモードの対称性を σ_i で表し、ショートモードの対称性を $\bar{\sigma}_i$ で表し、それぞれ次式のように定義する。

$$\sigma_i, \bar{\sigma}_i = \begin{cases} -1, & i \text{ が対称モードのとき 例え、TM}_{110} \\ 1, & i \text{ が反対称モードのとき 例え、TE}_{111} \end{cases} \tag{3.30}$$

ここに定義した対称性を表す量 σ_i と $\bar{\sigma}_i$ を用いると、固有関数の左右のディスク孔での値の間には、次の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{e}}_i(L) &= \sigma_i \dot{\mathbf{e}}_i(R) \\
 \bar{\mathbf{h}}_i^*(L) &= -\bar{\sigma}_i \bar{\mathbf{h}}_i^*(R)
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

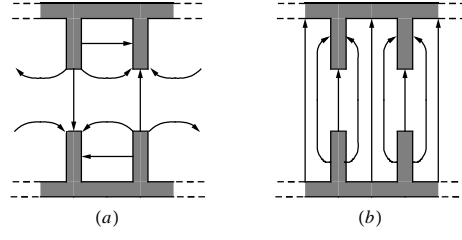


図 3.5: TM110like- π と TE111like-0 の電場。(a);TM110like- π (対称モード) (b);TE111like-0 (反対称モード) の電気力線の概念図。

また、ディスク孔部での法線ベクトルについては次式が成り立つ。

$$\mathbf{n}_L = -\mathbf{n}_R \quad (3.32)$$

この関係を用いると、式 (3.29) の右側ディスク孔での電場 $\mathbf{E}_\perp(n, R)$ は、次式のようにオープンモードの右側のディスク孔の値 $\dot{\mathbf{e}}_j(R)$ のみで書き表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp(n, R) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \{ \dot{\mathbf{e}}_j(R) + \sigma_j \dot{\mathbf{e}}_j(R) e^{-i\phi} \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j (1 + \sigma_j e^{-i\phi}) \dot{\mathbf{e}}_j(R) \end{aligned} \quad (3.33)$$

左側のディスク孔での電場 $\mathbf{E}_\perp(n, L)$ について同様なことを行くと、次式のようにオープンモードの右側のディスク孔の値 $\dot{\mathbf{e}}_j(R)$ のみで書き表すことができる。

$$\mathbf{E}_\perp(n, L) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j (e^{i\phi} + \sigma_j) \dot{\mathbf{e}}_j(R) \quad (3.34)$$

以上のオープンモードにより展開されたディスク面での法線ベクトル \mathbf{n} と垂直の電場 $\mathbf{E}_\perp(n, R)$, $\mathbf{E}_\perp(n, L)$ を用いて、式 (3.23) の右辺の面積分を評価する。この式の右辺第 1 項の面積分は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \int_L \{ \mathbf{E}_\perp(L) \times \bar{\mathbf{h}}_i^*(L) \} \cdot \mathbf{n}_L dS &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j (e^{i\phi} + \sigma_j) \int_L \{ \dot{\mathbf{e}}_j(R) \times \bar{\mathbf{h}}_i^*(L) \} \cdot \mathbf{n}_L dS \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j (\bar{\sigma}_i e^{i\phi} + \bar{\sigma}_i \sigma_j) \int_R \{ \dot{\mathbf{e}}_j(R) \times \bar{\mathbf{h}}_i^*(R) \} \cdot \mathbf{n}_R dS \end{aligned} \quad (3.35)$$

同様に式 (3.23) の右辺 2 項の面積分は、次式のようになる。

$$\int_R \mathbf{E}_\perp(R) \times \bar{\mathbf{h}}_i^*(R) \cdot \mathbf{n}_R dS = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j (\sigma_j e^{-i\phi} + 1) \int_R \{ \dot{\mathbf{e}}_j(R) \times \bar{\mathbf{h}}_i^*(R) \} \cdot \mathbf{n}_R dS \quad (3.36)$$

ディスク孔での面積分を表す式 (3.35)(3.36) を式 (3.23) に代入する。

$$\left\{ \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{\bar{\omega}_i}{c} \right)^2 \right\} \int_V \bar{\mathbf{e}}_i^* \cdot \mathbf{E} dv = \frac{\bar{\omega}_i}{2c} \sum_{j=1}^{\infty} a_j (\bar{\sigma}_i e^{i\phi} + \sigma_j e^{-i\phi} + \bar{\sigma}_i \sigma_j + 1) \int_R \{ \dot{\mathbf{e}}_j(R) \times \bar{\mathbf{h}}_i^*(R) \} \cdot \mathbf{n}_R dS \quad (3.37)$$

さて、次に式 (3.37) の左辺の体積分や右辺の面積分を評価する。このために、行列 \mathbf{V} , \mathbf{M} を定義する。それぞれの行列の $\{i, j\}$ 成分 v_{ij} , m_{ij} は、次式のように定義する。

$$v_{ij} = \int_V \bar{\mathbf{e}}_i^* \cdot \dot{\mathbf{e}}_j dv \quad (3.38)$$

$$m_{ij} = \int_R \dot{\mathbf{e}}_j(R) \times \bar{\mathbf{h}}_i^*(R) \cdot \mathbf{n}_R dS \quad (3.39)$$

これらの行列の成分を用いると、式 (3.37) は次式のように書ける。

$$\left\{ \left(\frac{\omega}{\bar{\omega}_i} \right)^2 - 1 \right\} \sum_{j=1}^{\infty} a_j v_{ij} = \frac{c}{2\bar{\omega}_i} \sum_{j=1}^{\infty} \{ \bar{\sigma}_i e^{i\phi} + \sigma_j e^{-i\phi} + \bar{\sigma}_i \sigma_j + 1 \} a_j m_{ij} \quad (3.40)$$

次に体積分 v_{ij} は面積分 m_{ij} で置き換えることができることを以下に示す。そのために、式 (3.23) に次式

$$\mathbf{E} = \dot{\mathbf{e}}_j \quad (3.41)$$

$$\omega = \dot{\omega}_j \quad (3.42)$$

を代入すると、

$$\int_v \bar{\mathbf{e}}_i^* \cdot \dot{\mathbf{e}}_j dv = \frac{\bar{\omega}_i c}{\dot{\omega}_j^2 - \bar{\omega}_i^2} \left[\int_L \{ \dot{\mathbf{e}}_j(L) \times \bar{\mathbf{h}}_i^*(L) \} \cdot \mathbf{n}_L dS + \int_R \{ \dot{\mathbf{e}}_j(R) \times \bar{\mathbf{h}}_i^*(R) \} \cdot \mathbf{n}_R dS \right] \quad (3.43)$$

となる。左辺の体積分は v_{ij} そのものであるが、右辺の面積積分はディスクの両側の孔の部分の積分であるために m_{ij} とは異なる。しかし、モードの対称性、式 (3.31), (3.32) を用いると、左側のディスク孔の面積分を右側のそれで書き表すことができ、式 (3.43) は、

$$\int_v \bar{\mathbf{e}}_i^* \cdot \dot{\mathbf{e}}_j dv = \frac{\bar{\omega}_i c}{\dot{\omega}_j^2 - \bar{\omega}_i^2} (\sigma_j \bar{\sigma}_i + 1) \int_R \{ \dot{\mathbf{e}}_j(R) \times \bar{\mathbf{h}}_i^*(R) \} \cdot \mathbf{n}_R dS \quad (3.44)$$

となる。したがって、体積分 v_{ij} は面積分 m_{ij} により、

$$v_{ij} = \frac{\bar{\omega}_i c}{\dot{\omega}_j^2 - \bar{\omega}_i^2} \{ \sigma_j \bar{\sigma}_i + 1 \} m_{ij} \quad (3.45)$$

と表せる。

以上の結果より、式 (3.40) は、

$$\left\{ \left(\frac{\omega}{\bar{\omega}_i} \right)^2 - 1 \right\} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{\omega}_i^2}{\dot{\omega}_j^2 - \bar{\omega}_i^2} [\sigma_j \bar{\sigma}_i + 1] m_{ij} a_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \{ \bar{\sigma}_i e^{i\phi} + \sigma_j e^{-i\phi} + \bar{\sigma}_i \sigma_j + 1 \} m_{ij} a_j \quad (3.46)$$

となり、右側のディスク孔の面積分 m_{ij} のみ評価すれば、方程式を組み立てることができる。

3.2.3 固有値問題

行列の定義

式(3.46)を行列の固有値問題の式に変形するために、以下のベクトルや行列を定義する。まず、オープンモードの成分を表す a_j は次のようなベクトル \mathbf{a} で表す。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

また、以下の成分を持つ行列 $\bar{\Omega}$, \mathbf{U} , \mathbf{T} を定義する。

$$\bar{\Omega}_{ij} = \bar{\omega}_i \delta_{ij} \quad (3.48)$$

$$U_{ij} = \frac{\bar{\omega}_i^2}{\omega_j^2 - \bar{\omega}_i^2} [\sigma_j \bar{\sigma}_i + 1] m_{ij} = \frac{\bar{\omega}_i}{c} v_{ij} \quad (3.49)$$

$$T_{ij} = \frac{1}{2} [\bar{\sigma}_i e^{i\phi} + \sigma_j e^{-i\phi} + \bar{\sigma}_i \sigma_j + 1] m_{ij} \quad (3.50)$$

固有値方程式に変形

式(3.46)は、全ての i について成り立っている。このことを、ここで定義した行列 $\bar{\Omega}$, \mathbf{U} , \mathbf{T} を用いて表現すると式(3.46)は、

$$(\omega^2 \bar{\Omega}^{-2} - \mathbf{E}) \mathbf{U} \mathbf{a} = \mathbf{T} \mathbf{a} \quad (3.51)$$

と書け、更に、

$$\omega^2 \mathbf{a} = \mathbf{U}^{-1} \bar{\Omega}^2 (\mathbf{T} + \mathbf{U}) \mathbf{a} \quad (3.52)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}^{-1} \bar{\Omega}^2 (\mathbf{T} + \mathbf{U}) \quad (3.53)$$

とおけば、

$$\mathbf{X} \mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{a} \quad (3.54)$$

これが、オープンモードを基底関数として、任意のセル間位相差 ϕ の電場の級数展開を表す方程式である。式(3.54)の ω^2 と \mathbf{a} は、それぞれモードの周波数とオープンモードの成分を表し、行列 \mathbf{X} の固有値と固有ベクトルになっている。この行列 \mathbf{X} を構成する行列 $\bar{\Omega}$, \mathbf{U} , \mathbf{T} は、MAFIA やフィールドマッチング等の電磁場計算コードにより計算可能な量である。すなわち、加速セルを決められた境界条件のもとで計算することにより、その共振周波数と境界(ディスク孔部)の電磁場¹を求め全ての行列の値を決めることができる。

¹オープンモードやショートモードの固有関数はセルの電磁場に等しく、これら固有関数の値は電磁場計算コードより得ることができる。

3.2.4 行列 \mathbf{X} の性質

式 (3.53) で定義された行列 \mathbf{X} の性質を調べる。

セル間位相差依存性

まず初めに、行列 \mathbf{X} がセル間位相差 ϕ に対してどのような振る舞いを示すか調べる。そのために、以下の行列を定義し議論を進める。

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 & & \mathbf{0} \\ & \bar{\sigma}_2 & \\ \mathbf{0} & & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

$$\acute{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \acute{\sigma}_1 & & \mathbf{0} \\ & \acute{\sigma}_2 & \\ \mathbf{0} & & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

このような行列を定義すると、式 (3.49), (3.50) で定義された行列 \mathbf{U}, \mathbf{T} は、次式に書き直すことができる。

$$\mathbf{U} = c^{-1} \bar{\Omega} \mathbf{V} \quad (3.59)$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{S}} \mathbf{M} e^{i\phi} + \mathbf{M} \acute{\mathbf{S}} e^{-i\phi} + \bar{\mathbf{S}} \mathbf{M} \acute{\mathbf{S}} + \mathbf{M}) \quad (3.60)$$

すると、式 (3.53) から、行列 \mathbf{X} は次式のように書き改められる。

$$\mathbf{X} = c \mathbf{V}^{-1} \bar{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{S}} \mathbf{M} e^{i\phi} + \mathbf{M} \acute{\mathbf{S}} e^{-i\phi} + \bar{\mathbf{S}} \mathbf{M} \acute{\mathbf{S}} + \mathbf{M}) + c^{-1} \bar{\Omega} \mathbf{V} \right\} \quad (3.61)$$

この行列は、次式のように3個の定数係数行列 $\mathbf{X}_K, \mathbf{X}_C, \mathbf{X}_S$ をもった三角関数で表すことができる。

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_K + \mathbf{X}_C \cos(\phi) + i \mathbf{X}_S \sin(\phi) \quad (3.62)$$

ただし、

$$\mathbf{X}_K = \frac{c}{2} \mathbf{V}^{-1} \bar{\mathbf{\Omega}} (\bar{\mathbf{S}} \mathbf{M} \mathbf{S}' + \mathbf{M}) + \mathbf{V}^{-1} \bar{\mathbf{\Omega}}^2 \mathbf{V} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{X}_C = \frac{c}{2} \mathbf{V}^{-1} \bar{\mathbf{\Omega}} (\bar{\mathbf{S}} \mathbf{M} + \mathbf{M} \mathbf{S}') \quad (3.64)$$

$$\mathbf{X}_S = \frac{c}{2} \mathbf{V}^{-1} \bar{\mathbf{\Omega}} (\bar{\mathbf{S}} \mathbf{M} - \mathbf{M} \mathbf{S}') \quad (3.65)$$

である。

成分の分布

付録 Fの結果から、行列 \mathbf{X} の成分の分布は次式のようになる。

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{Kij} + x_{Cij} \cos(\phi) & (\acute{s}_{ii} = \acute{s}_{jj} \text{ の場合}) \\ ix_{Sij} \sin(\phi) & (\acute{s}_{ii} \neq \acute{s}_{jj} \text{ の場合}) \end{cases} \quad (3.66)$$

エルミート性

損失の無いセル内の電磁場の周波数は実数でなくてはならない。また、各モードの電磁場は直交しなくてはならないのは、付録 Bの示す通りである。そのためには、行列 \mathbf{X} の全ての固有値 ω が実数かつその全ての固有ベクトル \mathbf{a} が直交していることが要求される。このことを満足するためには、行列 \mathbf{X} がエルミートであることが必要十分条件である。付録 Fに示されるように、ここで求めた行列 \mathbf{X} はエルミートである。

トレース

付録 Fの結果から、行列 \mathbf{X} のトレースは次式のようになる。

$$\text{tr}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \sum_{i=\text{対称}} \bar{\omega}_i^2 + \sum_{j=\text{反対称}} \acute{\omega}_j^2, & \text{for } \phi = 0 \\ \frac{1}{2} (\sum_i \bar{\omega}_i^2 + \sum_j \acute{\omega}_j^2), & \text{for } \phi = \frac{\pi}{2} \\ \sum_{i=\text{反対称}} \bar{\omega}_i^2 + \sum_{j=\text{対称}} \acute{\omega}_j^2, & \text{for } \phi = \pi \end{cases} \quad (3.67)$$

セル間位相差 $\phi = 0$ のモードは、対称モードのショートモードと反対称モードのオープンモードから構成されている（付録 D）。一方、セル間位相差 $\phi = \pi$ のモードは、反対称モードのショートモードと対称モードのオープンモードから構成されている（付録 D）。行列のトレースはその固有値の和に等しいことを考えると、行列 \mathbf{X} のトレースが式 (3.67) のようになるのは当然である。

3.2.5 キック因子の計算

行列 \mathbf{X} の固有値や固有ベクトルを計算することにより、周波数やオープンモードで展開した電磁場がわかる。これらから、双極モードのキック因子を計算する方法を示す。ただし、詳細については付録 G を参照のこと。

周期構造の加速セル当たりの双極モードのキック因子 \tilde{k} は、

$$\tilde{k} = \frac{c|V|^2}{4a^2\omega U} \quad (3.68)$$

と定義されている (1.2.2 節)。ここで、 c , a , ω , U は、それぞれ光速、ディスク孔の半径、周波数、セル当たりの蓄積エネルギー (stored energy) である。また、電圧 V は

$$V = \int E_z(z, r = a) e^{ikz} dz \quad (3.69)$$

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (3.70)$$

である。この積分範囲は、1 つの加速セルの左端から右端までである。 $E_z(z, r = a)$ は $r = a$ の場所での電場の z 方向成分である。

したがって、キック因子は電圧 V と蓄積エネルギー U を計算することにより求めることができる。電圧 V は先に示した式から、蓄積エネルギーは

$$U = \frac{\varepsilon}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV \quad (3.71)$$

から計算できる。これらの量は、いずれもオープンモードで展開された電磁場から計算でき、付録 G にその方法を示す。本論文の計算は、全てこの付録で示した方法で行った。

3.3 オープンモード展開の実際の計算

フィールドマッチングを用いると、セル内の電磁場およびオープンモードとショートモードの固有関数が精度良く計算できる。この固有関数を用いて前節の固有値方程式をつくり周期構造のオープンモード展開を行う。その結果 (分散関係やキック因子など) をフィールドマッチングから直接得たものと比較し、オープンモード展開の実際の計算方法と有効性を議論する。

3.3.1 固有関数の計算

前節の行列 \mathbf{X} を計算するのに必要な固有関数 (オープンモードやショートモード) は、付録 C で示しているフィールドマッチングのコードを用いて計算できる。オープンモードやショートモードの定義から、セル間位相差 $\phi = 0$ または $\phi = \pi$ の電磁場がこれら固有関数の値に等しいことは明らかである。また、固有値 $\bar{\omega}_i$ や $\bar{\omega}_j$ はフィールドマッチングから求められた周波数そのものである。

3.3.2 直接フィールドの積分から X を決める場合

行列 X の計算方法及びその特徴

無限に多くのオープンモードとショートモードを用いて数値計算することは不可能である。そこで有限個、すなわち N_{open} 個で打ち切って計算する。まず電場の展開は、

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^{N_{\text{open}}} a_j \mathbf{e}_j \quad (3.72)$$

と書ける。対応する固有値方程式の行列 X は $2N_{\text{open}}$ 個のオープンモードおよびショートモードの固有関数および周波数、

$$\mathbf{e}_j, \omega_j, \bar{\mathbf{e}}_j, \bar{\omega}_j \quad j = 1, 2, 3, \dots, N_{\text{open}} \quad (3.73)$$

を用いて直接面積分・体積分などを行い、式 (3.61) を求めることができる。

行列 X の ϕ 依存性は式 (3.61) で表現できるから、パスバンドにわたっての電磁場と周波数は、この式の位相 ϕ を変化させることにより求めることができる。この場合、 N_{open} 個の分散曲線が得られる。

付録 F に示されるように無限に多くのオープンモードとショートモードを用いた場合のみ行列 X はエルミートである。有限個のオープン・ショートモードから構成される行列 X は必ずしもエルミートではない。このことは、オープンモード展開で計算されるセル内の電磁場は直交しないことと周波数が虚数を含む場合があることを意味している。このような物理的矛盾を抱えているが、オープンモード展開の結果得られる電磁場とその周波数の近似が良いかどうか検討する。

計算結果と考察

ここでは、ディスク孔 a の大きさと展開するオープンモードの数を変えて、分散関係と電磁場の積分量であるキック因子を計算した。その結果を付録 H にまとめて示す。

ディスク孔 a が小さい場合

ディスク孔 a が小さい場合 ($a=3.0[\text{mm}]$)、分散関係の一致は比較的良い。特に、セル間位相差 $\phi = 0, \pi$ のときはフィールドマッチングの結果と一致している。キック因子は、展開するオープンモードの数が増加するに従いフィールドマッチングの結果に近づく。

このようにカップリングが小さい場合、パスバンドにわたっての電磁場の分布の変化は小さい。カップリングが小さい加速セルで、ある分散曲線上のセル間位相差 $\phi = 0$ のときの電磁場がオープンモードとすると、 $\phi = \pi$ のときはショートモードとなる。そして、このショートモードとオープンモードの電磁場は、非常によく似ていてその違いはディスク孔付近に集中する。

オープンモード展開では、このショートモードもオープンモードで展開することになるが、カップリングが小さい場合、展開係数の大部分は同じ分散曲線状のオープンモードが

占めることになる。ディスク孔付近の電磁場の差異は、他のオープンモードにより展開することになるが、それは非常に小さいであろう。したがって、ディスク孔が小さい場合、 n 個の HEM_{1x} モードをオープンモードで展開するためには、 n 個のオープンモードがあれば比較的良い近似で展開でき、モード間の結合も小さいと考えられる。

ディスク孔 a が大きい場合

ディスク孔が $a \geq 4.0[\text{mm}]$ の場合、展開するモードの数が増えると分散関係が実際からずれる。 $a=6.0[\text{mm}]$ ともなると周波数が複素数になる(図 3.6)。ある固有値が複素数の場合その複素共役も固有値であるため、その実数部分をプロットした図 3.6では、その部分の分散曲線は重なっている。

しかしこのときでさえも、低次の2つのモード (HEM_{11} と HEM_{12}) は、主に低次の2個のオープンモードから構成されている。他方、 HEM_{13} 以上のモードはより高次のモードの寄与も大きく無視できない。したがって、低次の2個のモードは低次の2個のオープンモードである程度展開可能であると思われる。

HEM_{13} 以上のモードでは、モード数 n 個をオープンモード展開する場合、 n 個以上のオープンモードが必要となる。本小節の方法でのオープンモード展開の場合、オープンモード展開の基底関数の不足分は行列 \mathbf{X} のエルミートからのずれに現れると思われる。このずれが大きくなると、固有値が複素数となってしまふ。

まとめ

オープンモード展開は、基底関数(オープンモード)が完全系として理論は構築された。それにもかかわらず、実際加速管内の電磁場の数値計算にこれを適用する場合、基底関数としてのオープンモードは有限個しか計算できないために完全系になり得ない。この完全系からのずれが行列 \mathbf{X} のエルミートからのずれになり、固有値が複素数になる。

したがって、オープンモード展開でディスク孔 a の大きい加速セルを取り扱うためには、有限個のオープンモードで近似的に完全系を作る必要がある。すなわち、無限次元の空間から有限次元で閉じるような部分空間を取り出す近似をおこない行列 \mathbf{X} をエルミートにする必要がある。

3.3.3 エルミート行列になるように行列 \mathbf{X} を決める場合

前小節に示した方法で計算すると、明らかに物理的に矛盾する結果が生じる。すなわち、比較的ディスク孔 a が大きい場合、その周波数が複素数になることがある。これは、有限個のオープンモードで電磁場を展開しているために、行列 \mathbf{X} がエルミートになっていないことを示している。このように、ある固有関数系で電磁場を展開しその係数を数値計算により求める方法を用いる限り、この問題は避けることができない。しかし、何らかの近似を用いて、この行列 \mathbf{X} をエルミートにする方法を探ることを試みる。

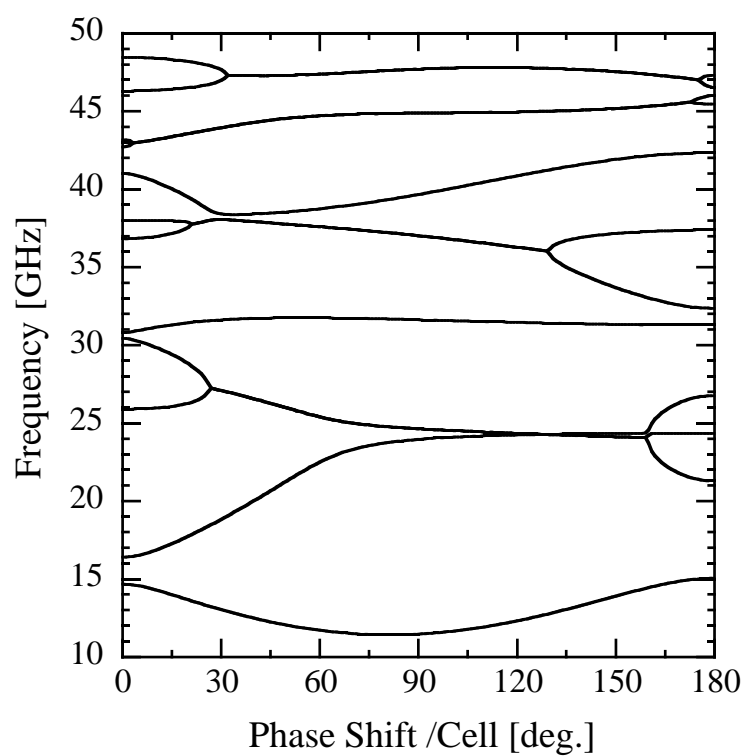


図 3.6: 面積分から行列を作り 12 個のオープンモード展開したときの分散関係。周波数の実数部分をプロットした。このときのセルは、 $a = 6.0[\text{mm}]$, $t = 2.0[\text{mm}]$, $D = 8.7474[\text{mm}]$, $b = 11.5128[\text{mm}]$ である。

行列 \mathbf{X} を固有値と固有ベクトルで表す

まず、あるモード \mathbf{a} に対する固有値方程式 (3.54)

$$\mathbf{X}\mathbf{a} = \omega^2\mathbf{a} \quad (3.74)$$

を全てのモードを含む行列表式にする。そのために、固有値から作られる対角行列 $\mathbf{\Omega}_\phi$ の定義を行う。その対角成分はセル間位相差 ϕ のときの HEM_{1j} の角振動数 $\omega_{\phi jj}$ とする。

$$\mathbf{\Omega}_\phi = \begin{pmatrix} \omega_{\phi 11} & & & \mathbf{0} \\ & \omega_{\phi 22} & & \\ & & \omega_{\phi 33} & \\ \mathbf{0} & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

次に、固有ベクトルから作られる行列 \mathbf{A}_ϕ を定義する。その成分 $a_{\phi ij}$ は、次式のように HEM_{1j} の i 番目のオープンモードの成分と定義する。

$$a_{\phi ij} = \int \mathbf{E}_{\phi j} \cdot \mathbf{e}_i^* dv \quad (3.76)$$

ここで、 $\mathbf{E}_{\phi j}$ はセル間位相差 ϕ の HEM_{1j} の電場分布である。すると行列 \mathbf{A}_ϕ は、次式のようになる。

$$\mathbf{A}_\phi = \begin{matrix} & \mathbf{E}_{\phi 1} & \mathbf{E}_{\phi 2} & \mathbf{E}_{\phi 3} & \cdots \\ \begin{matrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{\phi 11} & a_{\phi 12} & a_{\phi 13} & \cdots \\ a_{\phi 21} & a_{\phi 22} & a_{\phi 23} & \cdots \\ a_{\phi 31} & a_{\phi 32} & a_{\phi 33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3.77)$$

\mathbf{A}_ϕ や $\mathbf{\Omega}_\phi$ を構成する $a_{\phi ij}$ と $\omega_{\phi jj}$ は、全て図 3.7 に示す分散曲線上の黒丸にあり、フィールドマッチング等で計算した周波数と電磁場から得ることができる。

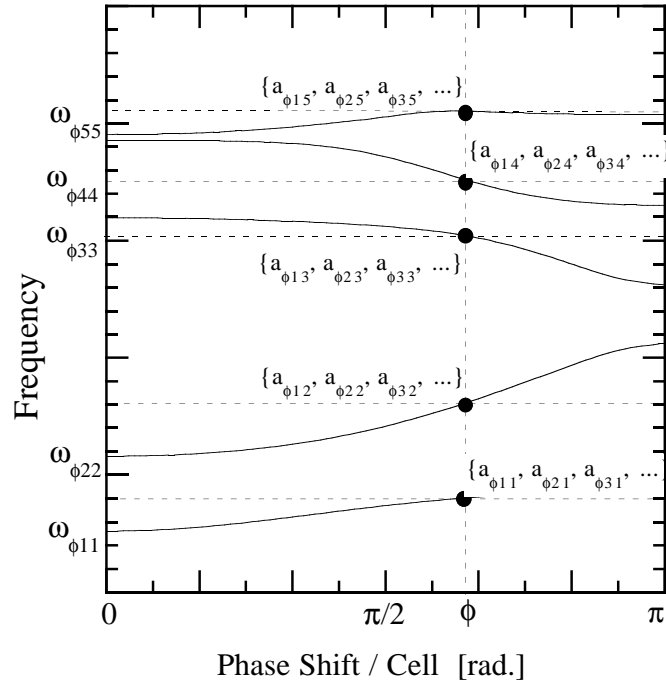
実際、本研究の計算ではこの行列の成分 $a_{\phi ij}$ を全て純実数にするために、対称モード（電場の横方向成分は反対称）の電場 $\mathbf{E}_{\phi j}$ とオープンモード \mathbf{e}_i を純実数とし、反対称モードのそれらは純虚数として計算した。このようにすると、セル間位相差が $0, \pi$ 以外、すなわち進行波のときでもオープンモードの成分行列 \mathbf{A}_ϕ を実数にすることができ、数値計算をする上で極めて有利である。

これらの行列 $\mathbf{\Omega}_\phi$, \mathbf{A}_ϕ は、その定義から、

$$\mathbf{X}_\phi \mathbf{A}_\phi = \mathbf{A}_\phi \mathbf{\Omega}_\phi^2 \quad (3.78)$$

である。この行列 \mathbf{X}_ϕ は、セル間位相差 ϕ の場合の行列 \mathbf{X} であり、周波数（固有値）を表す行列 $\mathbf{\Omega}_\phi$ とオープンモードの成分（固有値ベクトル）を表す行列 \mathbf{A}_ϕ を用いて次式のように表すことができる。

$$\mathbf{X}_\phi = \mathbf{A}_\phi \mathbf{\Omega}_\phi^2 \mathbf{A}_\phi^{-1} \quad (3.79)$$


 図 3.7: 分散曲線上の $\omega_{\phi jj}$ と $a_{\phi ij}$

ここで、オープンモードを無限の数とれば展開の基底関数は直交完全系になるから、行列 \mathbf{A}_ϕ はユニタリ行列となり、行列 \mathbf{X}_ϕ はエルミートになる。しかし、実際に数値計算する場合、行列 \mathbf{A}_ϕ の計算は適当な数で打ち切るので \mathbf{X}_ϕ のエルミート性は損なわれるが、これを回復するには \mathbf{A}_ϕ を適当に変形してユニタリにする必要がある。

行列 \mathbf{X}_ϕ のエルミート化

セル間位相差 $\phi = 0, \pi/2, \pi$ の $\mathbf{A}_\phi, \mathbf{\Omega}_\phi$ を計算することにより \mathbf{X}_ϕ を求め、式(3.62)の \mathbf{X}_K と \mathbf{X}_C と \mathbf{X}_S を計算する。この求められた3個の行列を用いて、3.2.4節に示された行列 \mathbf{X} の3つの性質、エルミート性・成分の分布・トレースを全て満足する行列を作ることを試みる。

N_{opn} 番目までのモードでの展開を試みる。行列 $\mathbf{A}_\phi, \mathbf{\Omega}_\phi$ は、 $N_{\text{opn}} \times N_{\text{opn}}$ 行列になるが、行列 \mathbf{A}_ϕ はユニタリ行列にならない。行列 \mathbf{A}_ϕ をユニタリ化して行列 \mathbf{X} をエルミートにする必要がある。そのために、行列 \mathbf{A}_ϕ をシュミットの直交化を用いてユニタリ化し、ユニタリ行列 $\hat{\mathbf{A}}_\phi$ をつくる。直交化の手順は次の通りである。

$$\hat{\mathbf{a}}_{\phi i1} = \frac{\mathbf{a}_{\phi i1}}{|\mathbf{a}_{\phi i1}|}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{a}'_{\phi i2} = \mathbf{a}_{\phi i2} - (\hat{\mathbf{a}}_{\phi i1} \cdot \mathbf{a}_{\phi i2})\hat{\mathbf{a}}_{\phi i1}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\phi i2} = \frac{\mathbf{a}'_{\phi i2}}{|\mathbf{a}'_{\phi i2}|}$$

$$\begin{aligned}
&\Downarrow \\
\mathbf{a}'_{\phi i3} &= \mathbf{a}_{\phi i3} - (\hat{\mathbf{a}}_{\phi i1} \cdot \mathbf{a}_{\phi i3})\hat{\mathbf{a}}_{\phi i1} - (\hat{\mathbf{a}}_{\phi i2} \cdot \mathbf{a}_{\phi i3})\hat{\mathbf{a}}_{\phi i2}, \quad \hat{\mathbf{a}}_{\phi i3} = \frac{\mathbf{a}'_{\phi i3}}{|\mathbf{a}'_{\phi i3}|} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.80}$$

この直交化の手続きは、低次モードのオープンモード展開係数の変化が小さくなるように、1番目の列ベクトルから行う。ここで、 $\mathbf{a}_{\phi in}$ と $\hat{\mathbf{a}}_{\phi in}$ は、それぞれ行列 \mathbf{A}_ϕ と行列 $\hat{\mathbf{A}}_\phi$ の n 列目の列ベクトルである。このシュミットの直交化により、行列 \mathbf{A}_ϕ はユニタリー化された行列 $\hat{\mathbf{A}}_\phi$ に変換される。この $\hat{\mathbf{A}}_\phi$ を用いて、式(3.79)に従い行列 $\hat{\mathbf{X}}$ を計算すると次式のようにエルミート行列 $\hat{\mathbf{X}}_\phi$ が得られる。

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{X}}_\phi &= \hat{\mathbf{A}}_\phi \boldsymbol{\Omega}_\phi^2 \hat{\mathbf{A}}_\phi^{-1} \\
&= \hat{\mathbf{A}}_\phi \boldsymbol{\Omega}_\phi^2 \hat{\mathbf{A}}_\phi^T
\end{aligned} \tag{3.81}$$

以上に示した操作をセル間位相差 $\phi = 0, \pi/2, \pi$ について行い、エルミート行列 $\hat{\mathbf{X}}_0$ と $\hat{\mathbf{X}}'_{\pi/2}$ と $\hat{\mathbf{X}}_\pi$ を計算する。ただし、 $\hat{\mathbf{X}}_{\pi/2}$ を計算するときは、3.2.4節の「トレース」に示した性質を保存するように、最高次のモードの周波数 $\omega_{\pi/2 N_{\text{open}} N_{\text{open}}}$ の値を調整する。この操作により、計算する最高次である $\text{HEM}_{1 N_{\text{open}}}$ の分散関係は実際とは異なるものになる。

$$\omega_{\pi/2 N_{\text{open}} N_{\text{open}}}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{\text{open}}} (\omega_{0ii}^2 + \omega_{\pi ii}^2) - \sum_{i=1}^{N_{\text{open}}-1} \omega_{\pi/2 ii}^2 \tag{3.82}$$

これら3個のエルミート行列 $\hat{\mathbf{X}}_0, \hat{\mathbf{X}}'_{\pi/2}, \hat{\mathbf{X}}_\pi$ から、式(3.62)を用いて、3個のエルミート行列 $\hat{\mathbf{X}}_K, \hat{\mathbf{X}}_C, \hat{\mathbf{X}}_S$ を計算する。 $\phi = 0, \pi$ の場合から、

$$\hat{\mathbf{X}}_K = \frac{\hat{\mathbf{X}}_0 + \hat{\mathbf{X}}_\pi}{2} \tag{3.83}$$

$$\hat{\mathbf{X}}_C = \frac{\hat{\mathbf{X}}_0 - \hat{\mathbf{X}}_\pi}{2} \tag{3.84}$$

と計算できる。また、 $\phi = \pi/2$ の場合より、 $\hat{\mathbf{X}}_K, \hat{\mathbf{X}}_S$ が計算できるが、先に求めた $\hat{\mathbf{X}}_K$ と異なる。これらを区別するために、 $\phi = \pi/2$ の場合プライム記号を付ける。3.2.4節の「成分の分布」に示した性質と $\hat{\mathbf{X}}'_{\pi/2}$ から、これらの行列 $\hat{\mathbf{X}}'_K, \hat{\mathbf{X}}'_S$ を求めることができる。

$$\hat{\mathbf{X}}'_{\pi/2} = \hat{\mathbf{X}}'_K + i\hat{\mathbf{X}}'_S \tag{3.85}$$

ここで求められた行列 $\hat{\mathbf{X}}'_K$ と先に $\phi = 0, \pi$ から求められた行列 $\hat{\mathbf{X}}_K$ は、多少異なる。この差異は、有限個のオープンモードで電磁場を展開する場合のシュミットの直交化の手続きから生じている。そこで固有値、すなわち $\phi = \pi/2$ の周波数の二乗を変えずに $\hat{\mathbf{X}}'_K$ を $\hat{\mathbf{X}}_K$ に変換する相似変換、

$$\hat{\mathbf{X}}_{\pi/2} = \bar{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{X}}'_{\pi/2} \bar{\mathbf{U}}^{-1} \tag{3.86}$$

となる正則行列 \bar{U} を考える。変換後の行列 $\hat{X}_{\pi/2}$ をエルミートに保つためには、 \bar{U} がユニタリ行列であることが必要である ($\bar{U}^{-1} = \bar{U}^T$)。すると、

$$\hat{X}_{\pi/2} = \bar{U} \hat{X}'_{\pi/2} \bar{U}^T \quad (3.87)$$

となり、これは、

$$\hat{X}_K + i\hat{X}_S = \bar{U}(\hat{X}'_K + i\hat{X}'_S)\bar{U}^T \quad (3.88)$$

と書ける。こうして \hat{X}_S が得られれば、

$$\hat{X}_\phi = \hat{X}_K + \hat{X}_C \cos(\phi) + i\hat{X}_S \sin(\phi) \quad (3.89)$$

が得られる。この \hat{X}_ϕ は、有限個のオープンモードで閉じており、しかも、3.2.4節に示した行列 X_ϕ の性質全てを満足する。

相似変換の実際

先に示した式(3.88)の相似変換を行い、式(3.89)によって表現されているパスバンドにわたってのオープンモード展開の評価を行いたい。しかし、その変換行列 \bar{U} が一意的に決まらず無数に存在するために、変換行列 \bar{U} によってオープンモード展開の結果が異なる。したがって、このように無数に存在する行列から適当な1つを決めるためには、なんらかの条件を課す必要がある。最も良い条件は、この相似変換によって行列 $\hat{X}'_{\pi/2}$ の変化が最も少ないようにすることである。このことは、相似変換によって $\phi = \pi/2$ のオープンモードの展開係数の変化を最小にすることと等価である。その為には、単位行列に近い変換行列 \bar{U} を用いるのが良いが、実際にこれを求めることは非常に困難である。

そこで、図3.8に示すアルゴリズムで行列の変換を行った。しかし、このアルゴリズムが相似変換を表しているかどうかは不明なので、実際数値計算を行い確かめた。

ただし、本研究では先に述べたように数値計算の都合上、対称モードの電場 $E_{\phi j}$ とオープンモード \hat{e}_i を実数とし、反対称モードのそれらは純虚数として計算した。したがって、 $i\hat{X}'_S$ は純実数になることに注意する必要がある。

この変換のアルゴリズムについて以下に示す。

1. $\hat{X}'_{\pi/2} \leftarrow C_1 \hat{X}'_K + C_2 \hat{X}'_K + i\hat{X}'_S$

新たにエルミート行列 $\hat{X}'_{\pi/2}$ を式(3.88)の変換後の行列 \hat{X}'_K と変換前の行列 \hat{X}'_K 、 \hat{X}'_S で作る。この操作により行列のトレースを変化させないために、係数は $C_1 + C_2 = 1$ としている。

2. 固有値方程式を解く。

3. 固有値方程式の固有値 ω'^2 が対角成分となる行列 Ω'^2 と、固有ベクトル b' が列ベクトルとなる行列 B' を作る。

$$4. \hat{\mathbf{X}}'_{\pi/2} \leftarrow \mathbf{B}'(C_1\boldsymbol{\Omega}_{\pi/2}^2 + C_2\boldsymbol{\Omega}^2)\mathbf{B}'^T$$

新たにエルミート行列 $\hat{\mathbf{X}}'_{\pi/2}$ を \mathbf{B}' と $\boldsymbol{\Omega}_{\pi/2}$ と $\boldsymbol{\Omega}^2$ を用いて作る。この操作により行列のトレースを変化させないために、係数は $C_1 + C_2 = 1$ としている。

5. 行列の成分の分布の性質を利用して、定数行列の項 $\hat{\mathbf{X}}''_K$ と \sin の係数の項 $i\hat{\mathbf{X}}''_S$ に分ける。

$$6. \hat{\mathbf{X}}'_K \leftarrow \hat{\mathbf{X}}''_K, \quad \hat{\mathbf{X}}'_S \leftarrow C_1\hat{\mathbf{X}}''_S + C_2\hat{\mathbf{X}}'_S$$

新たに行列 $\hat{\mathbf{X}}'_K$ と $\hat{\mathbf{X}}'_S$ をつくる。また、行列のトレースを変化させないために、係数は $C_1 + C_2 = 1$ としている。

7. 以上の操作を50000回繰す。

この計算をすると、 $\hat{\mathbf{X}}'_K$ は $\hat{\mathbf{X}}_K$ に近づくが、固有値の対角行列 $\boldsymbol{\Omega}^2$ は変化しないことが期待できる。一方、 $\hat{\mathbf{X}}'_S$ は $\hat{\mathbf{X}}'_K$ 同様変化し、 $\hat{\mathbf{X}}_S$ に収束するだろう。 $\hat{\mathbf{X}}'_{\pi/2}$ の収束先を $\hat{\mathbf{X}}_{\pi/2}$ と次式のように書き表せる。

$$\hat{\mathbf{X}}_{\pi/2} = \hat{\mathbf{X}}_K + i\hat{\mathbf{X}}_S \quad (3.90)$$

こうして収束すると、得られた行列 $\hat{\mathbf{X}}_K, \hat{\mathbf{X}}_C, \hat{\mathbf{X}}_S$ を用いてできる行列

$$\hat{\mathbf{X}}_{\phi} = \hat{\mathbf{X}}_K + \hat{\mathbf{X}}_C \cos(\phi) + i\hat{\mathbf{X}}_S \sin(\phi) \quad (3.91)$$

は、3.2.4節に示した行列 \mathbf{X}_{ϕ} の全ての性質を有し、しかも $\phi = 0, \pi/2, \pi$ は出発点であった厳密な値に近いことが期待される。

収束点の安定性を調べるために、収束係数 C_1 を0.1から1.0まで変化させて、式(3.89)に従い行列 $\hat{\mathbf{X}}$ の固有値を計算し、その結果である分散関係をフィールドマッチングのそれと比べた。結果を付録Iにまとめて示す。この計算結果から、次のことがわかった。

- 周波数は全て実数である。これは、行列 $\hat{\mathbf{X}}$ が常にエルミートになっているからである。
- $\phi = 0, \pi/2, \pi$ の周波数は常にフィールドマッチングの結果と一致している。このことは $\phi = 0, \pi$ の場合、式(3.81)から明らかである。一方、 $\phi = \pi/2$ の場合、その周波数が一致していることはこの行列の変換アルゴリズムが相似変換になっていることを示している。
- 収束係数が $C_1 \geq 0.5$ になると、フィールドマッチングとの差が顕著になり、 C_1 が大きいほどその差が大きくなる。収束係数 C_1 を大きくすれば収束は早くなるが、収束先の $\hat{\mathbf{X}}_{\pi/2}$ ともとの $\hat{\mathbf{X}}'_{\pi/2}$ との差が大きくなる。その結果、 $\hat{\mathbf{X}}_S$ が実際の値に近い $\hat{\mathbf{X}}'_S$ との差が大きくなる。この $\hat{\mathbf{X}}_S$ が加速セルの実際の値を反映していないために、分散関係が崩れてくるものと思われる。
- 収束係数が $C_1 \leq 0.3$ であれば、セル間位相差 $\phi = 45, 135[\text{deg.}]$ の周波数は十分収束する。このことは、この行列変換のアルゴリズムは収束係数が $C_1 \leq 0.3$ であれば問題なく使用できることを示している。

以上をまとめると、収束係数を $C_1 = 0.1$ 程度にしておけば、オープンモード展開の分散関係はフィールドマッチングのそれと良い一致が得られる。以降本論文では、収束係数は $C_1 = 0.1$ とし計算を進める。

計算結果

実際加速セルを計算する上でこのエルミート化の有効性を確認するために、ディスク孔の $a=3.0, 4.5, 6.0$ [mm] (ただし、ディスク厚は $t=2.0$ [mm]) に対して、展開するオープンモードの数を $N_{\text{open}}=2,4,8,16$ と変化させたときの分散関係とキック因子を計算しフィールドマッチングの結果と比べた。それを付録 J に示す。その結果から以下のことがわかる。

- 分散関係は、計算している最高次のモードを除いて、いずれの場合もフィールドマッチングの結果と良い一致を示している。最高次のモードのずれは、3.2.4節の行列 \mathbf{X} に述べたトレースに関する性質を満足させるため式 (3.82) に示したように、周波数を変えていることが原因となっている。
- 分散関係は低次のモードほどフィールドマッチングとの一致がよい。これは、低次のモードからシュミットの直交化を行ったので、低次のモードほどオープンモードの展開係数が実際の加速セルと一致しているためである。
- キック因子は、低次のモードほどフィールドマッチングの結果と良い一致を示し、そしてオープンモードの数が多いほどフィールドマッチングの結果に近づく。キック因子の小さい比較的高いモードでも、両者はかなり良い一致を示している。

この計算結果から、本節に示した方法を用いれば、比較的ディスク孔の大きい周期構造の高次のモードまで、オープンモード展開で計算可能であると結論できる。

最後に、展開するモードの数を 24 個にした場合の結果を図 3.9 に示す。オープンモード展開とフィールドマッチングの分散関係は細部にわたって非常に良い一致を示している。この分散関係を、たった 3 個の行列 $\hat{\mathbf{X}}_K, \hat{\mathbf{X}}_C, \hat{\mathbf{X}}_S$ が三角関数係数となって表現していることは驚くべき事である。

まとめ

加速セルをオープンモードで展開する場合、実際には無限個のオープンモードが必要である。しかし数値計算の上では、有限個のオープンモードでその展開を打ち切る必要がある。その場合でも、本節のようにシュミットの直交化と相似変換を用いて、3.2.4節に示した行列 \mathbf{X} の持つべき基本的な性質を有限個の場合でも成り立つようにすれば、ディスク孔 a が大きい場合や展開するオープンモードの数が多い場合でも、分散関係とキック因子は正確に評価できることがわかった。

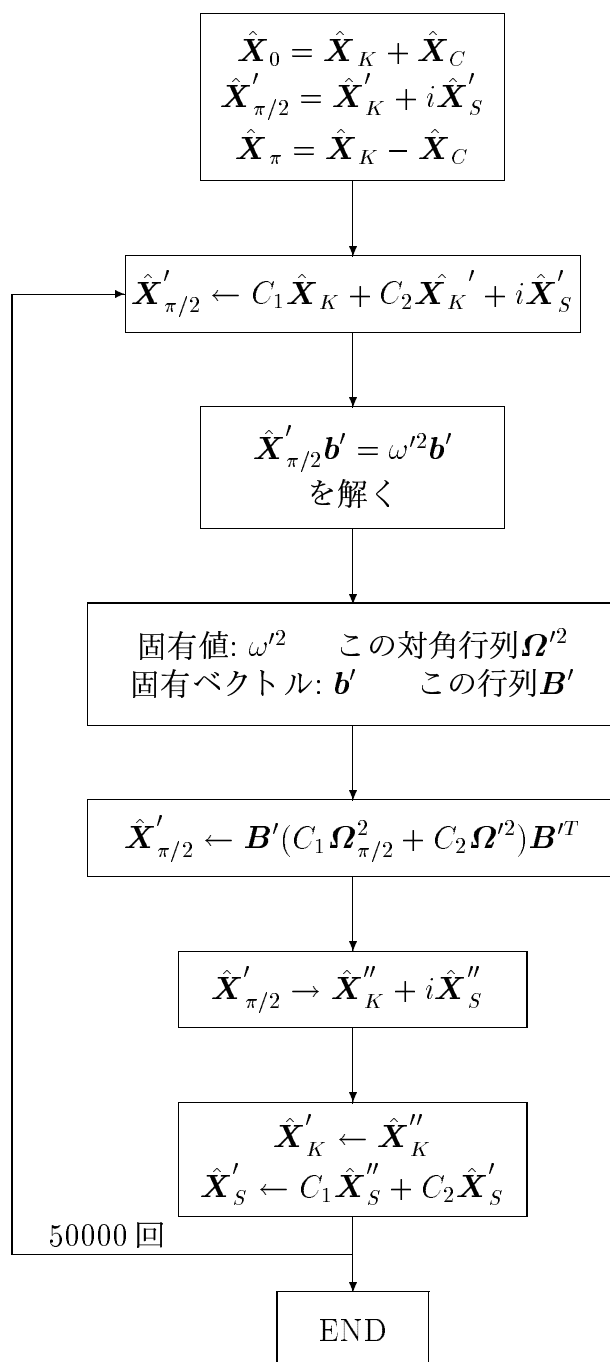


図 3.8: 行列変換の計算アルゴリズム

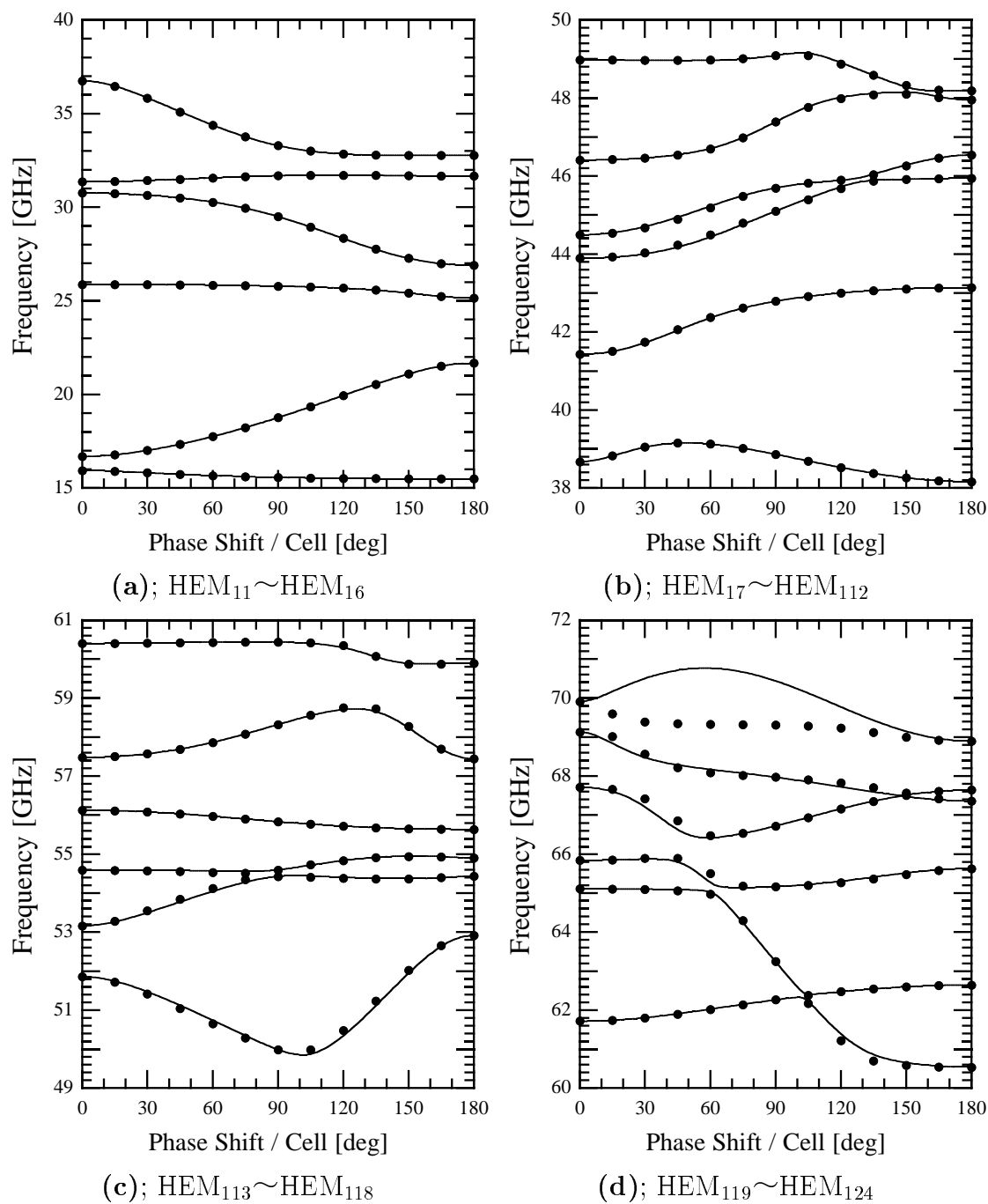


図 3.9: \mathbf{X} をエルミート行列にしたときの分散関係。モード数は24個。黒丸はフィールドマッチングで計算した結果であり、実線はオープンモード展開で計算した結果である。加速セルの形状は、 $a = 4.5[\text{mm}]$, $t = 2.0[\text{mm}]$, $D = 8.7474[\text{mm}]$, $b = 10.77871[\text{mm}]$ である。

3.3.4 まとめ

有限個のオープンモードで加速セル内の電場を展開する場合、3.3.2節では直接ディスク孔部分の積分から行列の成分を求め、それを式(3.61)に代入し行列 \mathbf{X} を求めた。このような行列 \mathbf{X} の場合、3.2.4節に示した行列 \mathbf{X} の性質の中で、エルミート性とトレースの性質が失われる。特に、エルミート性が失われることは問題であり、展開するモードが多い場合やセルのディスク孔が大きい場合、周波数が複素数になることがある。そこで、3.2.4節に示した行列 \mathbf{X} の性質を保存しつつ、有限の個数のオープンモードで展開するように3.3.3節の方法、すなわちシュミットの直交化と相似変換を用いて行列 \mathbf{X} を決めると、周波数が複素数になる矛盾が取り除かれる。このようにして決められた行列 \mathbf{X} が示す分散関係は、フィールドマッチングの結果と良い一致を示した。

3.4 等価回路モデルとの対応

本節では、前節までに取り扱ったオープンモード展開が、カップリングの小さい場合、コイルとコンデンサーから成る図 3.10 のような電気回路と等価であることを示す。本節では、この電気回路を等価回路と呼ぶ。

3.4.1 等価回路の表す固有値方程式

加速管のように、共振空洞が多数連結された構造を解析する場合、加速セルのモード（空洞モード）を共振回路に置き換え、それが各々カップリングしているような描像で取り扱うことがよく行われてきた（1.4 節参照）。オープンモード展開の式も、カップリングが小さい場合、各セルの共振モード（空洞モード）を共振回路（これを本論文ではセル共振回路と呼ぶ）に置き換え、それが各々カップリングしている図 3.10 の回路網を流れる電流を表す式と同じであることを本節で示す。

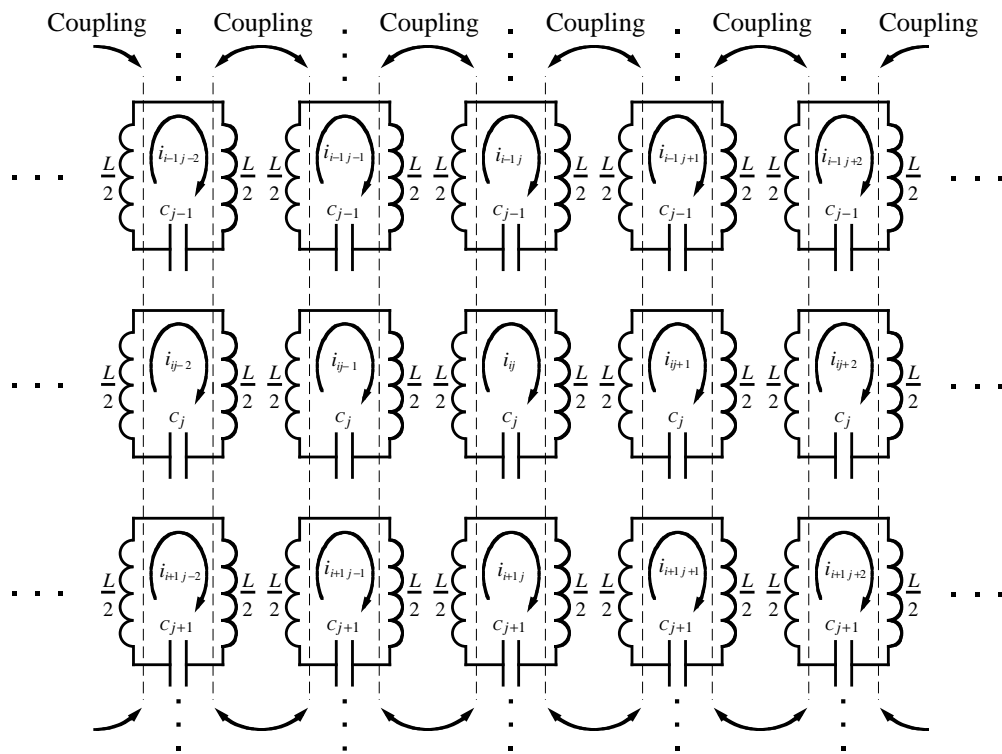


図 3.10: カップリングが小さい場合のオープンモード展開の等価回路。この回路は左右方向に完全な周期性がある。

この回路とオープンモード展開を表す式が同一であることを示す為に、本小節ではこの等価回路を記述する式を求める。 $\{i, j\}$ 番目のセル共振回路に流れる電流 i_{ij} は、次式によ

て表される。

$$L \frac{d^2 i_{ij}}{dt^2} + \frac{1}{C_j} i_{ij} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\{ s_{\ell}^R s_j^L \hat{M}_{j\ell} \frac{d^2 i_{i-1\ell}}{dt^2} + s_j^R s_{\ell}^L \hat{M}_{j\ell} \frac{d^2 i_{i+1\ell}}{dt^2} \right\} - \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\{ s_{\ell}^L s_j^L \bar{M}_{j\ell} \frac{d^2 i_{i\ell}}{dt^2} + s_j^R s_{\ell}^R \bar{M}_{j\ell} \frac{d^2 i_{i\ell}}{dt^2} \right\} = 0 \quad (3.92)$$

ここで、添字 $\{i, j\}$ は図 3.10 に示されるように、左から i 番目のセル、上から j 番目のセル共振回路を示す。 i_{ij} は、 $\{i, j\}$ 番目のセル共振回路の電流である。 s_j^L, s_j^R は、左右のコイルの巻き方を表し、1 または -1 の値である。そして、 L, C_j はそれぞれ図中に示される自己インダクタンスとキャパシタンスであり、 $\hat{M}_{j\ell}, \bar{M}_{j\ell}$ は相互インダクタンスである。この相互インダクタンスは、自己インダクタンス L とカップリング $\hat{k}_{j\ell}, \bar{k}_{j\ell}$ を用いて次のように書き表すことができる。

$$\hat{M}_{j\ell} = \frac{1}{2} \hat{k}_{j\ell} L \quad (3.93)$$

$$\bar{M}_{j\ell} = \frac{1}{2} \bar{k}_{j\ell} L \quad (3.94)$$

$\{i-1, \ell\}$ と $\{i, j\}$ のセル共振回路のカップリングを $\hat{k}_{j\ell}$ と表し、 $\{i, \ell\}$ と $\{i, j\}$ のセル共振回路のカップリングを $\bar{k}_{j\ell}$ と表す。そして、それらはカップリングを表す行列 $\hat{\mathbf{K}}, \bar{\mathbf{K}}$ を形成する。ただし、行列 $\bar{\mathbf{K}}$ の対角成分はゼロである。

また、この回路は左右方向に周期構造であるために、3.1 節同様の次式の周期的境界条件を課すことができる。

$$i_{i-1j} e^{i\phi} = i_{ij} = i_{i+1j} e^{-i\phi} \quad (3.95)$$

そして、ある任意の左から i 番目の回路 ($j = 1, 2, 3, \dots$) の電流 i_{ij} をベクトル \mathbf{I} で

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} i_{i1} \\ i_{i2} \\ i_{i3} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

と表し、さらに

$$\check{\mathbf{\Omega}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{LC_1}} & & & \mathbf{0} \\ & \frac{1}{\sqrt{LC_2}} & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{LC_3}} & \\ \mathbf{0} & & & \dots \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

$$\check{\mathbf{S}}^L = \begin{pmatrix} s_1^L & & & \mathbf{0} \\ & s_2^L & & \\ & & s_3^L & \\ \mathbf{0} & & & \dots \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

$$\check{S}^R = \begin{pmatrix} s_1^R & & 0 \\ & s_2^R & \\ 0 & & s_3^R \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.99)$$

と定義する。式 (3.92) を時間の項についてフーリエ変換して、これらのベクトルや行列を用いると、微分方程式 (3.92) は次のような固有値方程式に書き改められる。

$$\check{\Omega}^2 \mathbf{I} - \omega^2 \left\{ \mathbf{E} + \check{S}^L \frac{\hat{K}}{2} \check{S}^R e^{-i\phi} + \check{S}^R \frac{\hat{K}}{2} \check{S}^L e^{i\phi} - \check{S}^L \frac{\bar{K}}{2} \check{S}^L - \check{S}^R \frac{\bar{K}}{2} \check{S}^R \right\} \mathbf{I} = 0 \quad (3.100)$$

ここで、 \mathbf{E} は単位行列である。カップリングが小さい場合、すなわち行列 \hat{K} , \bar{K} が小さい場合、この固有値方程式は次式のように書き表せる。

$$\begin{aligned} \omega^2 \mathbf{I} &= \left[\mathbf{E} + \frac{1}{2} \left\{ \check{S}^L \hat{K} \check{S}^R e^{-i\phi} + \check{S}^R \hat{K} \check{S}^L e^{i\phi} - \check{S}^L \bar{K} \check{S}^L - \check{S}^R \bar{K} \check{S}^R \right\} \right]^{-1} \check{\Omega}^2 \mathbf{I} \\ &\cong \left[\mathbf{E} - \frac{1}{2} \left\{ \check{S}^L \hat{K} \check{S}^R e^{-i\phi} + \check{S}^R \hat{K} \check{S}^L e^{i\phi} - \check{S}^L \bar{K} \check{S}^L - \check{S}^R \bar{K} \check{S}^R \right\} \right] \check{\Omega}^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.101)$$

ここで、全てのセル共振回路の左側のコイルの巻き方を同じ方向とし、その向きは次式に従うように決める。

$$\check{S}^L = -\mathbf{E} \quad (3.102)$$

そうすると、式 (3.101) は次式のようになる。

$$\omega^2 \mathbf{I} = \left[\mathbf{E} + \frac{1}{2} \left\{ \hat{K} \check{S}^R e^{-i\phi} + \check{S}^R \hat{K} e^{i\phi} + \bar{K} + \check{S}^R \bar{K} \check{S}^R \right\} \right] \check{\Omega}^2 \mathbf{I} \quad (3.103)$$

すなわち、

$$\mathbf{X}_{cir} \mathbf{I} = \omega^2 \mathbf{I} \quad (3.104)$$

である。これが、カップリングが小さい場合の図 3.10 の回路を表す固有値方程式である。ただし、

$$\mathbf{X}_{cir} = \left[\mathbf{E} + \frac{1}{2} \left\{ \hat{K} \check{S}^R e^{-i\phi} + \check{S}^R \hat{K} e^{i\phi} + \check{S}^R \bar{K} \check{S}^R + \bar{K} \right\} \right] \check{\Omega}^2 \quad (3.105)$$

であり、行列 \mathbf{X}_{cir} の固有値と固有ベクトルがこの回路の周波数と電流値を表す。

3.4.2 等価回路とオープンモード展開との対応

本小節では、先に求めた等価回路の固有値方程式を表す行列 \mathbf{X}_{cir} とオープンモード展開の固有値方程式を表す行列 \mathbf{X} の対応を考える。

加速セル間のカップリングが小さい場合、ある任意のパスバンドの両端 ($\phi = 0$ と $\phi = \pi$ の場合) は、一方がオープンモードならば他方はショートモードである。そして、それら2個の電磁場分布はディスク孔付近を除いて良く似ており、それらの内積は1に近い。したがって、ショートモードに含まれるオープンモードの割合を表す行列 \mathbf{V} は、セル間のカッ

プリングが小さい場合、単位行列に近い。本小節では、セル間のカップリングが小さいという条件は、この行列 \mathbf{V} が単位行列であることと等価とする。このような場合、オープンモードとショートモードの対称性を表す行列 ($\check{\mathbf{S}}$ と $\check{\mathbf{S}}$) も等しくなる。

$$\mathbf{V} = \mathbf{E} \quad (3.106)$$

$$\check{\mathbf{S}} = \check{\mathbf{S}} \quad (3.107)$$

これらの式を用いると、式 (3.61) のオープンモード展開の固有値方程式を表す行列 \mathbf{X} は、次式のようになる。

$$\mathbf{X} = \left[\mathbf{E} + \frac{1}{2} \{ c\bar{\Omega}\mathbf{M}\bar{\Omega}^{-2}\check{\mathbf{S}}e^{-i\phi} + \check{\mathbf{S}}c\bar{\Omega}\mathbf{M}\bar{\Omega}^{-2}e^{i\phi} + \check{\mathbf{S}}c\bar{\Omega}\mathbf{M}\bar{\Omega}^{-2}\check{\mathbf{S}} + c\bar{\Omega}\mathbf{M}\bar{\Omega}^{-2} \} \right] \bar{\Omega}^2 \quad (3.108)$$

このオープンモードを表す行列 \mathbf{X} と等価回路を表す式 (3.105) の行列 \mathbf{X}_{cir} を比較すると次式の対応が得られる。

$$\check{\mathbf{S}} = \check{\mathbf{S}} \quad (3.109)$$

$$\check{\bar{\Omega}} = \bar{\Omega} \quad (3.110)$$

$$\check{\mathbf{K}} = c\bar{\Omega}\mathbf{M}\bar{\Omega}^{-2} \quad (3.111)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = c\bar{\Omega}\mathbf{M}\bar{\Omega}^{-2} \quad (3.112)$$

この対応より、カップリングが小さい場合、オープンモード展開の式は図 3.10に示された回路網の式と等価であると結論できる。そして、オープンモード展開での空胴モードの対称性は等価回路ではコイルの巻く方向に対応している。空胴のショートモードの周波数は、セル共振回路の周波数に対応している。ある空胴モードのカップリングは、隣の空胴モードのカップリングも自分自身の空胴モードのカップリングも同じ式で表せる。ある i 番目と j 番目の空胴モードとのカップリングを k_{ij} とすると、その値は次式のような電磁場の積分より求めることができる。

$$k_{ij} = c \frac{\bar{\omega}_{ii}}{\bar{\omega}_{jj}^2} \int_R \mathbf{e}_j \times \bar{\mathbf{h}}_i^* \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.113)$$

ディスク孔部分の面積分 m_{ij} が空胴モード間のカップリングの強さを表す。この積分は、カップリング積分と呼ばれる量である。

3.4.3 まとめ

本小節では、本論文で用いているオープンモード展開の方法は、カップリングが小さい場合、図 3.10に示した回路網の式と等価であることを示した。この回路網の縦方向が1段であれば、単一パスバンド等価回路モデルになる。2段であれば、二重パスバンド等価回路モデルになる。

今までの等価回路モデルを用いた周波数分散構造の研究で取り扱っているのは、 HEM_{11} と HEM_{12} モードである。これらのモードは HEM_{13} 以上のモードとのカップリングが小さ

いので、二重パスバンド等価回路モデルを用いての解析でも良い近似である。しかし、これらより高次のモードを解析する場合、3個以上のモードが強く結合しているために、これまでの等価回路モデルでの解析が困難になる。

したがって、カップリングの大きい加速管の HEM_{13} 以上のモードを解析する為には、オープンモード展開やフィールドマッチングまたはモードマッチングなどの方法が必要である。

第 4 章

非周期構造のオープンモード展開

前章では、周期構造内の電磁場をオープンモード展開で展開する方法、すなわちオープンモード展開の有効性を示した。本章ではこのオープンモード展開を非周期構造に適用する方法を示す。そしてそれを用いて周波数分散構造の共振モードを計算し、そのウェーク関数を評価する。本章の内容を以下に簡単に示す。

- 4.1節
本章で取り扱う非周期構造を示す。これは、ビームパイプや RF 入力導波管を無視した構造であることが実際の加速管と異なる。
- 4.2節
前章で示したオープンモード展開を非周期構造へ適用する方法を示す。ここで導かれる非周期構造のオープンモード展開を示す式は、周期構造の場合の式と類似している。加えて、展開を表す行列の成分である小行列は、周期構造を表す行列に等しい。
- 4.3節
21 個の加速セルから成る非周期構造の共振モードを MAFIA とオープンモード展開を用いて計算する。その結果、共振周波数とキック因子とも両者は良い一致を示した。
- 4.4節
150 個の加速セルから成る周波数分散構造の電場をセルごとに 8 個のオープンモードで展開して共振モードを計算する。これから、この構造のウェーク関数を求める。その結果、6 番目のモードを減衰させることが困難であることが判明した。
- 4.5節
JLC では、パルストレインが比較的長く空洞の壁損失によるウェーク関数の減衰が無視できないので、これについて見積る。さらに本論文で計算した周波数分散構造と実際に予定されている加速管との違いを示すことにより、解決すべき今後の課題を提示する。
- 4.6節
本章で計算した周波数分散構造の加速モードの特性について簡単に述べる。

4.1 計算形状

実際の周波数分散構造は、100～200 個の μm オーダーで形状が異なる加速セルおよびビームパイプと RF 入力用の導波管が接続されているカップラーセルから構成される。オープンモード展開でこの周波数分散構造を計算する場合、カップラーセルの効果を厳密な形で取り入れることは不可能である。しかし、その効果は $2/N_{Cell}$ (N_{Cell} は周波数分散構造を構成するセル数) と推測できるから、本研究ではカップラーセルの効果¹を無視して計算を行った。(図 4.1)。

前章同様に、このような非周期構造内の電場を加速セルごとのオープンモードで展開する。このオープンモードの定義域は、図 4.1 に示すように、各加速セルのディスクの中心とする。非周期構造の電場は、これらオープンモードの成分比として表現される。すなわち、

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^{N_{cell}} \mathbf{E}_n \quad (4.1)$$

$$\mathbf{E}_n = \sum_i a_{nj} \hat{\mathbf{e}}_{nj} \quad (4.2)$$

である。ここで、 \mathbf{E} は加速管全体の電場を、 \mathbf{E}_n は n 番目の加速セルの電場を、 $\hat{\mathbf{e}}_{nj}$ は n 番目の加速セルの j 番目のオープンモードを、 a_{nj} はその成分を表す。この成分と周波数を表す式を導くことが次節の目的である。

前章の周期構造の解析では、加速セルの境界条件を任意のセル間位相差 ϕ としたため電磁場は進行波となり、それを定在波であるオープンモードで級数展開を行った。すなわち、進行波を定在波で展開したことになる。一方、ここでの非周期構造の計算では、その境界条件は両端のビームパイプ部分で電氣的短絡面か磁氣的短絡面とする²。したがって、ビームパイプ部で閉じた加速管の共振モードを計算することになり、その電磁場は定在波である。この加速管にわたっての定在波を各セルごとのオープンモードで級数展開する。それ故、周期構造の解析とは異なり定在波を定在波で展開することになる。

4.2 非周期構造のオープンモード展開

本節では、非周期構造内の電場を加速セルごとのオープンモードで展開する方法を示す。ただし前章の周期構造の解析と同様、本節で示す電場は時間因子を含んでいないため(位置のみの関数)、時間の関数として電場を観測する場合 $e^{-i\omega t}$ を乗じる必要がある。

¹カップラーセルの周波数が周波数分散構造で予定している周波数からずれている効果は、 $2/N_{Cell}$ 程度と考えている。ビームパイプと RF 入力用の導波管からウェーク場が逃げ出す効果については今後検討を要する。

²4.3節以降の実際的な計算では両側の境界条件は電氣的短絡面とした。

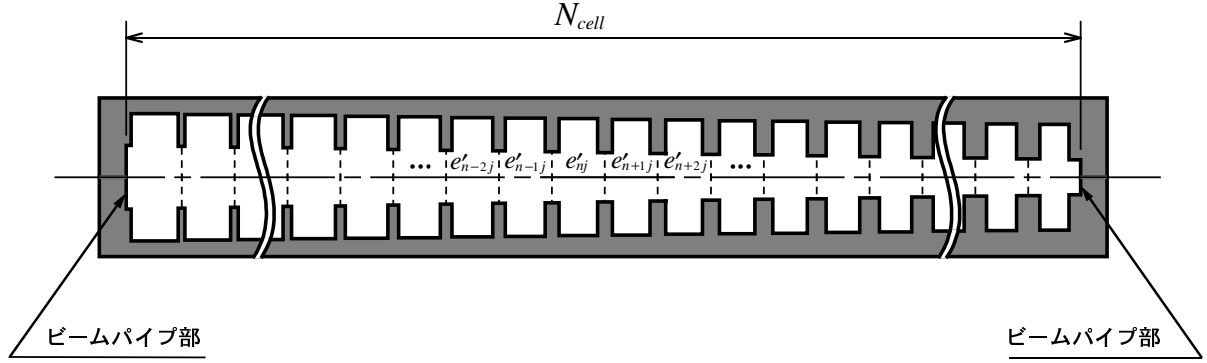


図 4.1: 本章で取り扱う非周期構造。図中の破線が各加速セルの境界であり、セルごとの固有関数の定義域を示す。

4.2.1 非周期構造のオープンモード展開の基本式

非周期構造は全て形状の異なる加速セルから構成されるので、加速管全体にわたっての電場 \mathcal{E} をセルごとの電場 \mathbf{E}_n の和として記述する。

$$\mathcal{E} = \sum_{n=1}^{N_{cell}} \mathbf{E}_n \quad (4.3)$$

ここで、添字 n は加速管のビームの入口から数えて n 番目の加速セルを示す。 i 番目と j 番目の加速セルでは、定義域が異なるため、

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_V \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j dv = U_i \delta_{ij} \quad (4.4)$$

であることに注意する必要がある。ここで U_i は、 i 番目の加速セルの蓄積エネルギーである。

次にこの n 番目のセル内の電磁場の満たす式を、前章の周期構造と同様の方法で導くことにする。はじめに次のようなショートモードの固有関数を定義する。

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{\mathbf{e}}_{ni} &= \frac{\bar{\omega}_{ni}}{c} \bar{\mathbf{h}}_{ni} \\ \nabla \times \bar{\mathbf{h}}_{ni} &= \frac{\bar{\omega}_{ni}}{c} \bar{\mathbf{e}}_{ni} \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで、 $\bar{\omega}_{ni}/c$ はショートモードの固有値であり、 c は光速を表す。 $\bar{\mathbf{e}}_{ni}$ と $\bar{\mathbf{h}}_{ni}$ はショートモードの固有関数を表す。これらの定義域は、非周期構造のディスクの中心面を境界とした加速セルの領域で図 4.2 に示す。そして、それぞれは次式の境界条件を満たす。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_{ni} \times \mathbf{n}_n &= 0 && (\text{セル壁}) \\ \bar{\mathbf{e}}_{ni} \times \mathbf{n}_n &= 0 && (\text{ディスク孔}) \\ \bar{\mathbf{h}}_{ni} \cdot \mathbf{n}_n &= 0 && (\text{セル壁}) \\ \bar{\mathbf{h}}_{ni} \cdot \mathbf{n}_n &= 0 && (\text{ディスク孔}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

ここで、 \mathbf{n}_n は n 番目のセルの境界の外側に向けた法線方向の単位ベクトルである。この境界条件から、これらの固有関数は純実数（または純虚数）にすることができる。3章の周期構造を解析したときと同様、これらショートモード $\bar{\mathbf{e}}_{ni}$ と $\bar{\mathbf{h}}_{ni}$ はセルのディスク孔部分が電氣的短絡面の場合の電場と磁場にそれぞれ等しいことは明らかであり、 $\bar{\omega}_{ni}$ はその場合の共振角振動数に等しい。したがって、これらの固有関数は加速セルの電磁場解析コードで計算可能である。さらに、計算の簡単化のために以下の規格化条件を課す。

$$\begin{aligned}\int_V \bar{\mathbf{e}}_{ni} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{mj}^* dv &= \delta_{nm} \delta_{ij} \\ \int_V \bar{\mathbf{h}}_{ni} \cdot \bar{\mathbf{h}}_{mj}^* dv &= \delta_{nm} \delta_{ij}\end{aligned}\quad (4.7)$$

ここで、クロネッカー記号の δ_{nm} は n 番目と m 番目のセルは定義域は異なることを示し、 δ_{ij} は i 番目と j 番目のオープンモードは直交することを示している。

これらの固有関数とマックスウェルの方程式から導かれる式 (3.8) とベクトル恒等式である式 (3.16) より、 n 番目の加速セルの電場は周期構造の場合と同様の式 (3.22) を満たす。

$$\left\{ \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{\bar{\omega}_{ni}}{c} \right)^2 \right\} \int_V \bar{\mathbf{e}}_{ni}^* \cdot \mathbf{E}_n dv = \int_S \left(\frac{\bar{\omega}_{ni}}{c} \mathbf{E}_n \times \bar{\mathbf{h}}_{ni}^* \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.8)$$

ここで、 \mathbf{E}_n はセル内の電場を、 $\bar{\mathbf{e}}_{ni}^*$ と $\bar{\mathbf{h}}_{ni}^*$ はショートモードの複素共役を、添字 ni は n 番目の加速セルの i 番目のモードを表す。この式はマックスウェルの方程式とベクトル恒等式より導かれた式であるから、近似の入っていない完全に正しい式である。

この電場 \mathbf{E}_n をオープンモード $\acute{\mathbf{e}}_{nj}$ で級数展開を行い、この式を満足する固有値方程式を導くことが、本節の以降の目的である。セル内の電場の級数展開は、

$$\mathbf{E}_n = \sum_j a_{nj} \acute{\mathbf{e}}_{nj} \quad (4.9)$$

と表せる。ここで a_{nj} はオープンモードの成分を表す。このオープンモードは、

$$\begin{aligned}\nabla \times \acute{\mathbf{e}}_{nj} &= \frac{\acute{\omega}_{nj}}{c} \acute{\mathbf{h}}_{nj} \\ \nabla \times \acute{\mathbf{h}}_{nj} &= \frac{\acute{\omega}_{nj}}{c} \acute{\mathbf{e}}_{nj}\end{aligned}\quad (4.10)$$

を満たす。 $\acute{\omega}_{nj}/c$ はオープンモードの固有値を、 $\acute{\mathbf{e}}_{nj}$ と $\acute{\mathbf{h}}_{nj}$ はオープンモードの固有関数を表す。これら固有関数の定義域は、ショートモードの場合と同じである (図 4.2)。そして境界条件は、

$$\begin{aligned}\acute{\mathbf{e}}_{nj} \times \mathbf{n}_n &= 0 && \text{(セル壁)} \\ \acute{\mathbf{e}}_{nj} \cdot \mathbf{n}_n &= 0 && \text{(ディスク孔)} \\ \acute{\mathbf{h}}_{nj} \cdot \mathbf{n}_n &= 0 && \text{(セル壁)} \\ \acute{\mathbf{h}}_{nj} \times \mathbf{n}_n &= 0 && \text{(ディスク孔)}\end{aligned}\quad (4.11)$$

である。このように境界条件を設定するとこれらの固有関数も純実数（または純虚数）にすることができ、オープンモード \bar{e}_{nj} と \bar{h}_{nj} は加速セルのディスク孔部分が磁氣的短絡面（電氣的開放面）の場合の電場と磁場にそれぞれ等しい。そして、規格化条件は、

$$\begin{aligned} \int_V \bar{e}_{ni} \cdot \bar{e}_{mj}^* dv &= \delta_{nm} \delta_{ij} \\ \int_V \bar{h}_{ni} \cdot \bar{h}_{mj}^* dv &= \delta_{nm} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.12)$$

とする。

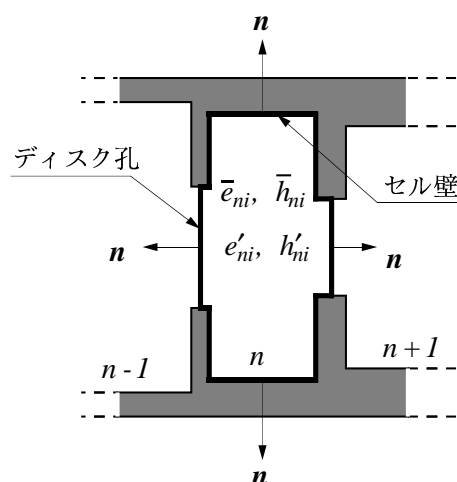


図 4.2: 非周期構造の電磁場を固有関数展開するときの固有関数の定義域。図中の太線で囲まれた部分が n 番目のセルの固有関数の定義域である。境界の法線 \mathbf{n} は、定義域の外向きである。

4.2.2 フィールドマッチングによる固有関数の計算

これまで定義した固有関数 \bar{e}_{ni} , \bar{h}_{ni} , e'_{ni} , h'_{ni} を用いて、式 (4.8) に従い、加速セルの電場 \mathbf{E}_n をオープンモード \bar{e}_{nj} で展開する。これをオープンモード展開というが、この場合オープンモード \bar{h}_{nj} はこの展開の式にあらわに表れないため、本小節では取り扱わない。

周期構造の場合と異なり非周期構造のこれらの固有関数の定義域は、左右のディスクの厚さや穴の大きさが異なり左右非対称である（図 4.2）。このような場合でもこれらの固有関数は MAFIA 等を用いて計算可能ではあるが、本研究では適当な近似を用いてフィールドマッチングで計算を行った。MAFIA を用いなかった理由は、後述するように非周期構造の場合でも周期構造の場合の X_S 行列を計算する必要があり、これはセル間位相差 $\phi = \pi/2$ の電磁場から評価できるが MAFIA(ver. 3.1) の 2 次元メッシュでは計算できないからである。

そこで、左右非対称な定義域の固有関数をフィールドマッチングで評価する方法を探る。加速セルの形状を決めるパラメーターのうちセル長 D とセルの内径 b は加速モード ($2\pi/3$ モード) と加速周波数 ($11.424[\text{GHz}]$) を決めるために使用される。したがって、周期構造の場合の固有関数 $\bar{e}_i, \bar{h}_i, \acute{e}_j$ はディスク厚 t とディスク孔 a の関数である。すなわち、

$$\bar{e}_i = \bar{e}_i(\mathbf{r}_\perp, z; t, a) \quad (4.13)$$

$$\bar{h}_i = \bar{h}_i(\mathbf{r}_\perp, z; t, a) \quad (4.14)$$

$$\acute{e}_j = \acute{e}_j(\mathbf{r}_\perp, z; t, a) \quad (4.15)$$

である。一方、非周期構造の固有関数は左右のディスクが異なるため、その独立変数は増え、

$$\bar{e}_{ni} = \bar{e}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, z; t_L, a_L, t_R, a_R) \quad (4.16)$$

$$\bar{h}_{ni} = \bar{h}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, z; t_L, a_L, t_R, a_R) \quad (4.17)$$

$$\acute{e}_{nj} = \acute{e}_{nj}(\mathbf{r}_\perp, z; t_L, a_L, t_R, a_R) \quad (4.18)$$

のようになる。ここで、変数 t_L, a_L, t_R, a_R はそれぞれ左右のディスク厚と穴径である。

周波数分散構造のように左右のディスクの形状の違いが小さい場合、その固有関数は周期構造の場合と同じように左右のディスク形状が同じ左右対称な固有関数で近似できるであろう。オープンモード展開を行う場合、固有関数の計算は、左右のディスク孔面での面積分と加速セル内の体積分の2つの場合に限られる。このうち左側のディスク孔面で面積分を行う場合、固有関数はそのディスクが作る周期構造の固有関数で近似する (図 4.3 の実線 A)。すなわち、

$$\bar{e}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, L; t_L, a_L, t_R, a_R) \cong \bar{e}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, L; t_L, a_L) \quad (4.19)$$

$$\bar{h}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, L; t_L, a_L, t_R, a_R) \cong \bar{h}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, L; t_L, a_L) \quad (4.20)$$

$$\acute{e}_{nj}(\mathbf{r}_\perp, L; t_L, a_L, t_R, a_R) \cong \acute{e}_{nj}(\mathbf{r}_\perp, L; t_L, a_L) \quad (4.21)$$

とする。右側のディスク孔面で面積分を行うときも同様に (図 4.3 の実線 C)、

$$\bar{e}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, R; t_L, a_L, t_R, a_R) \cong \bar{e}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, R; t_R, a_R) \quad (4.22)$$

$$\bar{h}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, R; t_L, a_L, t_R, a_R) \cong \bar{h}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, R; t_R, a_R) \quad (4.23)$$

$$\acute{e}_{nj}(\mathbf{r}_\perp, R; t_L, a_L, t_R, a_R) \cong \acute{e}_{nj}(\mathbf{r}_\perp, R; t_R, a_R) \quad (4.24)$$

とする。これらの近似を用いると、 n 番目のセルの左側のディスクのパラメーター (t_L, a_L) と $n-1$ 番目のセルの右側のディスクのパラメーター (t_R, a_R) は等しくなるので、

$$\begin{aligned} \bar{e}_{n-\frac{1}{2}i}(\mathbf{r}_\perp, z) &= \bar{e}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, z; t_L, a_L) \\ &= \bar{e}_{n-1i}(\mathbf{r}_\perp, z; t_R, a_R) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_{n-\frac{1}{2}i}(\mathbf{r}_\perp, z) &= \bar{h}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, z; t_L, a_L) \\ &= \bar{h}_{n-1i}(\mathbf{r}_\perp, z; t_R, a_R) \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \acute{e}_{n-\frac{1}{2}j}(\mathbf{r}_\perp, z) &= \acute{e}_{nj}(\mathbf{r}_\perp, z; t_L, a_L) \\ &= \acute{e}_{n-1j}(\mathbf{r}_\perp, z; t_R, a_R) \end{aligned} \quad (4.27)$$

と表現する。ここで、 $\bar{e}_{n-\frac{1}{2}i}(\mathbf{r}_\perp, z)$, $\bar{h}_{n-\frac{1}{2}i}(\mathbf{r}_\perp, z)$, $\acute{e}_{n-\frac{1}{2}j}(\mathbf{r}_\perp, z)$ は、 n と $n-1$ 番目の加速セルの間のディスクから周期構造を構成した場合の固有関数である。同様に、 n と $n+1$ 番目のセルとの間のディスク孔部では、

$$\begin{aligned}\bar{e}_{n+\frac{1}{2}i}(\mathbf{r}_\perp, z) &= \bar{e}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, z; t_R, a_R) \\ &= \bar{e}_{n+1i}(\mathbf{r}_\perp, z; t_L, a_L)\end{aligned}\quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}\bar{h}_{n+\frac{1}{2}i}(\mathbf{r}_\perp, z) &= \bar{h}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, z; t_R, a_R) \\ &= \bar{h}_{n+1i}(\mathbf{r}_\perp, z; t_L, a_L)\end{aligned}\quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}\acute{e}_{n+\frac{1}{2}j}(\mathbf{r}_\perp, z) &= \acute{e}_{nj}(\mathbf{r}_\perp, z; t_R, a_R) \\ &= \acute{e}_{n+1j}(\mathbf{r}_\perp, z; t_L, a_L)\end{aligned}\quad (4.30)$$

と表現する。

また体積分を行う場合、すなわちセル内全体にわたって固有関数が必要なときは左右の平均寸法のディスクが構成する左右対称¹の固有関数で近似する（図 4.3の実線 B）。すなわち、

$$t_M = \frac{1}{2}(t_L + t_R) \quad (4.31)$$

$$a_M = \frac{1}{2}(a_L + a_R) \quad (4.32)$$

$$\bar{e}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, z; t_L, a_L, t_R, a_R) \cong \bar{e}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, z; t_M, a_M) \quad (4.33)$$

$$\bar{h}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, z; t_L, a_L, t_R, a_R) \cong \bar{h}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, z; t_M, a_M) \quad (4.34)$$

$$\acute{e}_{nj}(\mathbf{r}_\perp, z; t_L, a_L, t_R, a_R) \cong \acute{e}_{nj}(\mathbf{r}_\perp, z; t_M, a_M) \quad (4.35)$$

である。以降これらを

$$\bar{e}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, z) = \bar{e}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, z; t_M, a_M) \quad (4.36)$$

$$\bar{h}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, z) = \bar{h}_{ni}(\mathbf{r}_\perp, z; t_M, a_M) \quad (4.37)$$

$$\acute{e}_{nj}(\mathbf{r}_\perp, z) = \acute{e}_{nj}(\mathbf{r}_\perp, z; t_M, a_M) \quad (4.38)$$

と表現する。

以上をまとめると、フィールドマッチングを用いて固有関数を評価するために、 n 番目のセルの i 番目の固有関数は表 4.1のように近似を行う。

これらの固有関数には、次に示す2つの任意性がある。

- ある加速セルの固有関数を e_{nj} , ($j = 1, 2, 3, \dots$) とすると、 $e_{nj}e^{i\varphi}$, ($j = 1, 2, 3, \dots$) も固有関数とすることができる。ここで φ は任意の実数であり、セルごとに独立に決めることができる。もし、固有関数を実数に決めても正負の任意性がある。
- 更に、固有関数の並べる順序 (i の順番) についてもセルごとに任意に決めることができる。

¹定義域が左右対称である。

表 4.1: 非周期構造の場合の固有関数の近似

	左側のディスク孔部	セル全体	右側のディスク孔部
ディスクパラメーター	(t_L, a_L)	$\frac{1}{2}\{(t_L, a_L) + (t_R, a_R)\}$	(t_R, a_R)
ディスク番号	$n - \frac{1}{2}$	n	$n + \frac{1}{2}$
図 4.3	実線 A	実線 B	実線 C
固有関数	$\bar{e}_{n-\frac{1}{2}i}(\mathbf{r})$ $\bar{h}_{n-\frac{1}{2}i}(\mathbf{r})$ $\acute{e}_{n-\frac{1}{2}j}(\mathbf{r})$	$\bar{e}_{ni}(\mathbf{r})$ $\bar{h}_{ni}(\mathbf{r})$ $\acute{e}_{nj}(\mathbf{r})$	$\bar{e}_{n+\frac{1}{2}i}(\mathbf{r})$ $\bar{h}_{n+\frac{1}{2}i}(\mathbf{r})$ $\acute{e}_{n+\frac{1}{2}j}(\mathbf{r})$

以降の計算で、これらの任意性があると計算が複雑になるので、モードの連続性を考慮し、

$$\begin{aligned} \bar{e}_{n-1j} &\simeq \bar{e}_{n-\frac{1}{2}j} \simeq \bar{e}_{nj} \simeq \bar{e}_{n+\frac{1}{2}j} \simeq \bar{e}_{n+1j} \\ \acute{e}_{n-1j} &\simeq \acute{e}_{n-\frac{1}{2}j} \simeq \acute{e}_{nj} \simeq \acute{e}_{n+\frac{1}{2}j} \simeq \acute{e}_{n+1j} \end{aligned} \tag{4.39}$$

とする。ここで、記号 \simeq は等しくはないが非常に近いことを示している。これらの関係は、隣の加速セル同士の j 番目の固有関数は良く似ていることを示している。したがって、ある任意の n 番目の加速セルの固有関数 $\bar{e}_{nj}e^{i\varphi}$ と $\acute{e}_{nj}e^{i\varphi}$ の φ と並べる順序 (j の順番)を決めれば、全ての加速セルについてのそれが決まることになる。

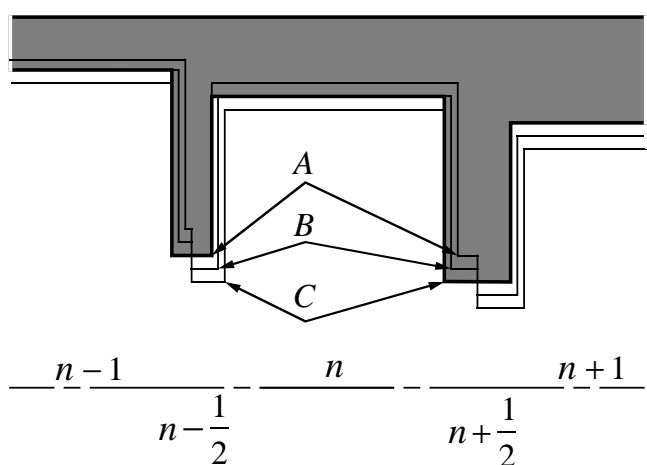


図 4.3: 非周期構造の固有関数の近似。実線 A が n 番目のセルの固有関数で左側のディスク孔の面積分を行う場合、B は体積分を行う場合、C は右側のディスク孔の面積分を行う場合である。

4.2.3 ディスク孔部分の面積分

固有関数の評価の方法が決まったので、式(4.8)を計算することにする。本小節では、この式の右辺の面積分を評価する。ここで、境界条件よりセル壁での積分はゼロになるため左右のディスク孔部分の積分を評価することになる。更に、周期構造を解析したときと同様、積分は固有関数の右側のディスク孔の積分、すなわち $\int_R dS$ で表現でき、本小節ではこの表式を求める。

式(4.8)の右辺の面積分はショートモード $\bar{\mathbf{h}}_{ni}^*$ の境界条件より、

$$\begin{aligned} & \int_S (\mathbf{E}_n \times \bar{\mathbf{h}}_{ni}^*) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_L \{ \mathbf{E}_{\perp n}(L) \times \bar{\mathbf{h}}_{n-\frac{1}{2}i}^*(L) \} \cdot \mathbf{n}_{nL} dS + \int_R \{ \mathbf{E}_{\perp n}(R) \times \bar{\mathbf{h}}_{n+\frac{1}{2}i}^*(R) \} \cdot \mathbf{n}_{nR} dS \end{aligned} \quad (4.40)$$

と書き表せる。ここで、 \mathbf{n}_{nL} と \mathbf{n}_{nR} は n 番目のセルの左右のディスク孔部での境界の法線方向の単位ベクトルである。また、 $\mathbf{E}_{\perp n}(L)$ と $\mathbf{E}_{\perp n}(R)$ は n 番目のセルの左右のディスク孔部の横方向の電場である。 n 番目の加速セルの左側のディスク孔部の電場 $\mathbf{E}_{\perp n}(L)$ は、 $n-1$ 番目の加速セルの右側のディスク孔部の電場 $\mathbf{E}_{\perp n-1}(R)$ と等しいので、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\perp n}(L) &= \mathbf{E}_{\perp n-1}(R) \\ &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}_{\perp n-1}(R) + \mathbf{E}_{\perp n}(L) \} \end{aligned} \quad (4.41)$$

である。そして、これらの電場をオープンモードで級数展開を行う。

$$\mathbf{E}_{\perp n-1}(R) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{n-1j} \mathbf{e}_{n-\frac{1}{2}j}(R) \quad (4.42)$$

$$\mathbf{E}_{\perp n}(L) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} \mathbf{e}_{n-\frac{1}{2}j}(L) \quad (4.43)$$

以上より、セルの左側のディスク孔部の電場をオープンモードで級数展開すると、

$$\mathbf{E}_{\perp n}(L) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \{ a_{n-1j} \mathbf{e}_{n-\frac{1}{2}j}(R) + a_{nj} \mathbf{e}_{n-\frac{1}{2}j}(L) \} \quad (4.44)$$

となる。同様にセルの右側では、

$$\mathbf{E}_{\perp n}(R) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \{ a_{nj} \mathbf{e}_{n+\frac{1}{2}j}(R) + a_{n+1j} \mathbf{e}_{n+\frac{1}{2}j}(L) \} \quad (4.45)$$

となる。

ここで取り扱っている固有関数の定義域は z 方向の中心面に対して対称であるから、固有関数には対称性がある。そこで、オープンモードの対称性を表す σ_i とショートモードの対称性を表す $\bar{\sigma}_i$ を定義する。これらは、前章の周期構造の解析の場合と同じように定義する[式(3.30)を参照]。すなわち、

$$\sigma_i, \bar{\sigma}_i = \begin{cases} -1, & i \text{ が対称モードのとき} \quad \text{例えば, TM}_{110} \\ 1, & i \text{ が反対称モードのとき} \quad \text{例えば, TE}_{111} \end{cases} \quad (4.46)$$

である。これらの対称性を表す量を用いると、左右のディスク孔での固有関数には次式が成り立つ [式 (3.31) を参照]。

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}}_{nj}(L) &= \sigma_j \dot{\boldsymbol{e}}_{nj}(R) \\ \bar{\boldsymbol{h}}_{ni}^*(L) &= -\bar{\sigma}_i \bar{\boldsymbol{h}}_{ni}^*(R)\end{aligned}\quad (4.47)$$

この対称性から、左側ディスク孔の電場を表す式 (4.44) は、右側のディスク孔部の固有関数で書き表すことができる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\perp n}(L) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ a_{n-1j} \dot{\boldsymbol{e}}_{n-\frac{1}{2}j}(R) + a_{nj} \sigma_j \dot{\boldsymbol{e}}_{n-\frac{1}{2}j}(R) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (a_{n-1j} + \sigma_j a_{nj}) \dot{\boldsymbol{e}}_{n-\frac{1}{2}j}(R)\end{aligned}\quad (4.48)$$

同様に右側ディスク孔の電場を表す式 (4.45) は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\perp n}(R) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ a_{nj} \dot{\boldsymbol{e}}_{n+\frac{1}{2}j}(R) + a_{n+1j} \sigma_j \dot{\boldsymbol{e}}_{n+\frac{1}{2}j}(R) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (a_{nj} + \sigma_j a_{n+1j}) \dot{\boldsymbol{e}}_{n+\frac{1}{2}j}(R)\end{aligned}\quad (4.49)$$

となる。

また、ディスク孔部での法線ベクトルについては、

$$\boldsymbol{n}_{nL} = -\boldsymbol{n}_{nR}\quad (4.50)$$

が成り立つ。この式とディスク孔部の電場を表現する式 (4.48), (4.49) から、式 (4.40) の右辺第1項の面積分は次のようになる。

$$\begin{aligned}& \int_L \{ \boldsymbol{E}_{\perp n}(L) \times \bar{\boldsymbol{h}}_{n-\frac{1}{2}i}^*(L) \} \cdot \boldsymbol{n} dS \\ &= \frac{1}{2} \sum_j (\bar{\sigma}_i a_{n-1j} + \sigma_j \bar{\sigma}_i a_{nj}) \int_R \{ \dot{\boldsymbol{e}}_{n-\frac{1}{2}j}(R) \times \bar{\boldsymbol{h}}_{n-\frac{1}{2}i}^*(R) \} \cdot \boldsymbol{n} dS\end{aligned}\quad (4.51)$$

式 (4.40) の右辺第2項の積分は、

$$\begin{aligned}& \int_R \{ \boldsymbol{E}_{\perp n}(R) \times \bar{\boldsymbol{h}}_{n+\frac{1}{2}i}^*(R) \} \cdot \boldsymbol{n} dS \\ &= \frac{1}{2} \sum_j (a_{nj} + \sigma_j a_{n+1j}) \int_R \{ \dot{\boldsymbol{e}}(R)_{n+\frac{1}{2}j} \times \bar{\boldsymbol{h}}^*(R)_{n+\frac{1}{2}i} \cdot \boldsymbol{n} \} dS\end{aligned}\quad (4.52)$$

となる。

ここで、式 (4.51), (4.52) を簡単にするために、種々の行列を定義する。これらの式的面積分を行列 $\boldsymbol{M}_{n-\frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{M}_{n+\frac{1}{2}}$ の成分で表現する。この行列の $\{i, j\}$ 成分は、

$$m_{n\pm\frac{1}{2}ij} = \int_R \dot{\boldsymbol{e}}_{n\pm\frac{1}{2}j}(R) \times \bar{\boldsymbol{h}}_{n\pm\frac{1}{2}i}^*(R) \cdot \boldsymbol{n} dS\quad (4.53)$$

である。そして行列 $M_{n\pm\frac{1}{2}}$ は、

$$M_{n\pm\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} m_{n\pm\frac{1}{2}11} & m_{n\pm\frac{1}{2}12} & m_{n\pm\frac{1}{2}13} & \cdots \\ m_{n\pm\frac{1}{2}21} & m_{n\pm\frac{1}{2}22} & m_{n\pm\frac{1}{2}23} & \cdots \\ m_{n\pm\frac{1}{2}31} & m_{n\pm\frac{1}{2}32} & m_{n\pm\frac{1}{2}33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

である。次に対称性を表す $\bar{\sigma}_i, \acute{\sigma}_i$ が対角成分となる対角行列 \bar{S}, \acute{S} を定義する。

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 & & \mathbf{0} \\ & \bar{\sigma}_2 & \\ \mathbf{0} & & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

$$\acute{S} = \begin{pmatrix} \acute{\sigma}_1 & & \mathbf{0} \\ & \acute{\sigma}_2 & \\ \mathbf{0} & & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

最後に、 n 番目のセル内の電場のオープンモードの成分を表すベクトル \mathbf{a}_n を定義する。

$$\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

新たに定義されたこれらの行列やベクトルと式(4.51)や式(4.52)とを用いると式(4.40)の面積分は

$$\begin{aligned} & \int_S (\mathbf{E}_n \times \bar{\mathbf{h}}_{ni}^*) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \bar{S} M_{n-\frac{1}{2}} \mathbf{a}_{n-1} + (\bar{S} M_{n-\frac{1}{2}} \acute{S} + M_{n+\frac{1}{2}}) \mathbf{a}_n + M_{n+\frac{1}{2}} \acute{S} \mathbf{a}_{n+1} \right\}_i \end{aligned} \quad (4.58)$$

となる。

4.2.4 両端の境界条件

前章の周期構造では、左・右端の境界条件として加速セルのディスク孔間の位相差 ϕ を課すことができ、その解は進行波であった。本章で取り扱う非周期構造の場合、その構造の両端の形状や両端のセルの電磁場が異なるため、周期性の境界条件を設定することはできない。本論文では、比較的簡単に計算できる境界条件として、両端のビームパイプが接続される部分の境界を電氣的または磁氣的短絡面として共振周波数とその電場を計算する。

このように境界条件を設定すると、この中の電磁場は定在波となり純実数（または純虚数）で書き表すことができる。

ここで、 N_{cell} 個のセルから構成される非周期構造の境界条件を与える式を導く。式(4.8)を評価する場合、境界条件はこの式の右辺の面積分に表れる。したがって、前小節で導いた面積分のうち、1番目と N_{cell} 番目のセルの面積分が境界条件に依存して変わる。本小節では、この境界条件を含んだ面積分を表現する式を求める。

ディスク孔部での電場は、そのディスクを挟んでいる両側のセルのオープンモードの成分により記述できる。そこで、非周期構造の両側に更に仮想的なセルを考え、そのセルのオープンモードの成分を決めることにより両側のビームパイプ部分での境界条件を満足させる（図4.4）。

左端の境界条件

まず初めに、左端のビームパイプ部の境界条件について考える。式(4.48)から、左端の電場は

$$\mathbf{E}_{\perp 1}(L) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (a_{0j} + \sigma_j a_{1j}) \mathbf{e}_{1-\frac{1}{2}j}(R) \quad (4.59)$$

と書き表せる。したがって、0番目の仮想セルのオープンモードの成分は、

$$\begin{aligned} a_{0j} &= -\sigma_j a_{1j} & (\text{電氣的短絡面}) \\ a_{0j} &= \sigma_j a_{1j} & (\text{磁氣的短絡面}) \end{aligned} \quad (4.60)$$

とすればよい。これを式(4.58)に代入すると、1番目のセルの面積分は

$$\begin{aligned} & \int_S (\mathbf{E}_1 \times \bar{\mathbf{h}}_{1i}^*) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \mp \bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_{1-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{S}} \mathbf{a}_1 + (\bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_{1-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{S}} + \mathbf{M}_{1+\frac{1}{2}}) \mathbf{a}_1 + \mathbf{M}_{1+\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{S}} \mathbf{a}_2 \right\}_i \end{aligned} \quad (4.61)$$

となる。ここで、 \mp の上側のマイナス記号は電氣的短絡面を、下側のプラス記号は磁氣的短絡面の場合を表している。

右端の境界条件

右端のビームパイプ部の境界条件についても同様に考える。式(4.49)から右端の電場は

$$\mathbf{E}_{\perp N_{cell}}(R) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (a_{N_{cell}j} + \sigma_j a_{N_{cell}+1j}) \mathbf{e}_{N_{cell}+\frac{1}{2}j}(R) \quad (4.62)$$

と書き表せる。したがって、 $N_{cell} + 1$ 番目の仮想セルのオープンモードの成分は、

$$\begin{aligned} a_{N_{cell}+1j} &= -\sigma_j a_{N_{cell}j} & (\text{電氣的短絡面}) \\ a_{N_{cell}+1j} &= \sigma_j a_{N_{cell}j} & (\text{磁氣的短絡面}) \end{aligned} \quad (4.63)$$

とすればよい。これを式(4.58)に代入すると、 N_{cell} 番目のセルの面積分は

$$\int_S (\mathbf{E}_{N_{cell}} \times \bar{\mathbf{h}}_{N_{cell}i}^*) \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} \left\{ \bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_{N_{cell}-\frac{1}{2}} \mathbf{a}_{N_{cell}-1} + (\bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_{N_{cell}-\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{M}_{N_{cell}+\frac{1}{2}}) \mathbf{a}_{N_{cell}} \mp \mathbf{M}_{N_{cell}+\frac{1}{2}} \mathbf{a}_{N_{cell}} \right\}_i \quad (4.64)$$

となる。ここで \mp の上側のマイナス記号は電氣的短絡面を、下側のプラス記号は磁氣的短絡面の場合を表している。

以上より、境界条件を考慮した両端のセルの面積分を表す行列の表式が求められた。前節の結果と併せると、非周期構造の全セルにわたっての式(4.8)の右辺の面積分を行列で表したことになる。

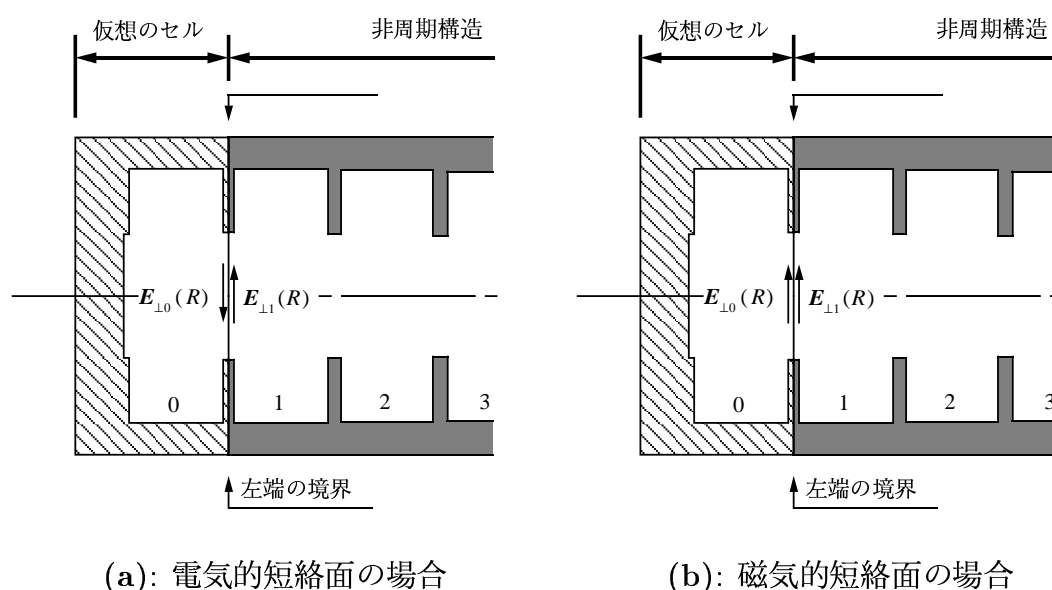


図 4.4: 非周期構造の左端の境界条件。実際の1番目のセルの左側に0番目のセルを仮定して、その間のディスク孔部が電氣的または磁氣的短絡面を形成している。

4.2.5 セル内の体積分

4.2.3節と4.2.4節より、式(4.8)の右辺の面積分が行列表示できた。この式の左辺の体積分についても行列表示を行う。その為に、この体積分のオープンモード展開を行う。

$$\int_V \bar{\mathbf{e}}_{ni}^* \cdot \mathbf{E}_n dv = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} \int_V \bar{\mathbf{e}}_{ni}^* \cdot \dot{\mathbf{e}}_{nj} dv \quad (4.65)$$

この式中の体積分を表現するために、行列 \mathbf{V}_n の (i, j) 成分 v_{nij} を次式のように定義する。

$$v_{nij} = \int_V \bar{\mathbf{e}}_{ni}^* \cdot \dot{\mathbf{e}}_{nj} dv \quad (4.66)$$

行列 \mathbf{V}_n は、

$$\mathbf{V}_n = \begin{pmatrix} v_{n11} & v_{n12} & v_{n13} & \cdots \\ v_{n21} & v_{n22} & v_{n23} & \cdots \\ v_{n31} & v_{n32} & v_{n33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

である。この行列を用いると、体積分は

$$\int_V \bar{\mathbf{e}}_{ni}^* \cdot \mathbf{E}_n dv = (\mathbf{V}_n \mathbf{a}_n)_i \quad (4.68)$$

となる。

4.2.6 固有値方程式

前小節までの結果をまとめると、 n 番目のセルの電場をオープンモードで展開し、式(4.8)を行列で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{\omega}{\bar{\omega}_{ni}} \right)^2 - 1 \right\} (\mathbf{V}_n \mathbf{a}_n)_i \\ &= \frac{c}{2\bar{\omega}_{ni}} \{ \bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_{n-\frac{1}{2}} \mathbf{a}_{n-1} + (\bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_{n-\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{M}_{n+\frac{1}{2}}) \mathbf{a}_n + \mathbf{M}_{n+\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{a}_{n+1} \}_i \end{aligned} \quad (4.69)$$

この式は全ての i について成り立つ。これを表現するために、次のような対角行列を定義する。

$$\bar{\Omega}_n = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_{n1} & & & & \mathbf{0} \\ & \bar{\omega}_{n2} & & & \\ & & \bar{\omega}_{n3} & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & \bar{\omega}_{nN_{cell}} \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

この対角行列を用いると式(4.69)は、

$$\begin{aligned} & (\omega^2 \bar{\Omega}_n^{-2} - \mathbf{E}) \mathbf{V}_n \mathbf{a}_n \\ &= \frac{c}{2} \bar{\Omega}_n^{-1} \{ \bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_{n-\frac{1}{2}} \mathbf{a}_{n-1} + (\bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_{n-\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{M}_{n+\frac{1}{2}}) \mathbf{a}_n + \mathbf{M}_{n+\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{a}_{n+1} \} \end{aligned} \quad (4.71)$$

と表現できる。この式を変形すると、

$$\begin{aligned} & \omega^2 \mathbf{a}_n \\ &= \frac{c}{2} \mathbf{V}_n^{-1} \bar{\Omega}_n \{ \bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_{n-\frac{1}{2}} \mathbf{a}_{n-1} + (\bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_{n-\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{M}_{n+\frac{1}{2}}) \mathbf{a}_n + \mathbf{M}_{n+\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{a}_{n+1} \} + \mathbf{V}_n^{-1} \bar{\Omega}_n^2 \mathbf{V}_n \mathbf{a}_n \end{aligned} \quad (4.72)$$

となる。更に、

$$\mathcal{X}_{nn-1} = \frac{c}{2} \mathbf{V}_n^{-1} \bar{\Omega}_n \bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_{n-\frac{1}{2}} \quad (4.73)$$

$$\mathcal{X}_{nn} = \frac{c}{2} \mathbf{V}_n^{-1} \bar{\Omega}_n (\bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_{n-\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{M}_{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{V}_n^{-1} \bar{\Omega}_n^2 \mathbf{V}_n \quad (4.74)$$

$$\mathcal{X}_{nn+1} = \frac{c}{2} \mathbf{V}_n^{-1} \bar{\Omega}_n \mathbf{M}_{n-\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{S}} \quad (4.75)$$

のような行列を定義すると、式 (4.73) は、

$$\omega^2 \mathbf{a}_n = \chi_{nn-1} \mathbf{a}_{n-1} + \chi_{nn} \mathbf{a}_n + \chi_{nn+1} \mathbf{a}_{n+1} \quad (4.76)$$

となる。更に、この式は全ての加速セル (全ての n) について成り立つ。このことを表現するために次のベクトルと行列を定義する。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N_{Cell}} \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & & & & 0 \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} & & & \\ & \chi_{32} & \chi_{33} & \chi_{34} & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & \chi_{N_{Cell}-1N_{Cell}-2} & \chi_{N_{Cell}-1N_{Cell}-1} & \chi_{N_{Cell}-1N_{Cell}} \\ & & & & \chi_{N_{Cell}N_{Cell}-1} & \chi_{N_{Cell}N_{Cell}} \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

これらを用いると式 (4.76) は、

$$\omega^2 \mathbf{A} = \boldsymbol{\chi} \mathbf{A} \quad (4.79)$$

となる固有値方程式に書き直される。これが、非周期構造の場合の固有値方程式である。したがって、行列 $\boldsymbol{\chi}$ を評価すれば非周期構造のオープンモード展開ができる。この行列の固有値と固有ベクトルが共振周波数とオープンモードの成分になることは言うまでもない。

ここで行列 $\chi_{nn-1}, \chi_{nn}, \chi_{nn+1}$ の性質を調べる。周波数分散構造のように隣り合うセル間の形状変化が小さい構造の場合、

$$\mathbf{V}_{n-\frac{1}{2}}^{-1} \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{n-\frac{1}{2}} \cong \mathbf{V}_n^{-1} \bar{\boldsymbol{\Omega}}_n \cong \mathbf{V}_{n+\frac{1}{2}}^{-1} \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{n+\frac{1}{2}} \quad (4.80)$$

というような近似が成り立つ。さらに、

$$\bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_{n-\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{M}_{n+\frac{1}{2}} \cong \bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_n \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{M}_n \quad (4.81)$$

というような近似も成り立つ。すると、

$$\chi_{nn-1} = \frac{c}{2} \mathbf{V}_{n-\frac{1}{2}}^{-1} \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{n-\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_{n-\frac{1}{2}} \quad (4.82)$$

$$\chi_{nn} = \frac{c}{2} \mathbf{V}_n^{-1} \bar{\boldsymbol{\Omega}}_n (\bar{\mathbf{S}} \mathbf{M}_n \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{M}_n) + \mathbf{V}_n^{-1} \bar{\boldsymbol{\Omega}}_n^2 \mathbf{V}_n \quad (4.83)$$

$$\chi_{nn+1} = \frac{c}{2} \mathbf{V}_{n+\frac{1}{2}}^{-1} \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{n+\frac{1}{2}} \mathbf{M}_{n+\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{S}} \quad (4.84)$$

となる。すると、これらの行列は式(3.63)~(3.65)から周期構造のパラメーター $\mathbf{X}_K, \mathbf{X}_C, \mathbf{X}_S$ で表現することができる。

$$\mathcal{X}_{nn-1} = \left(\frac{\mathbf{X}_C + \mathbf{X}_S}{2} \right)_{n-\frac{1}{2}} \quad (4.85)$$

$$\mathcal{X}_{nn} = (\mathbf{X}_K)_n \quad (4.86)$$

$$\mathcal{X}_{nn+1} = \left(\frac{\mathbf{X}_C - \mathbf{X}_S}{2} \right)_{n+\frac{1}{2}} \quad (4.87)$$

ただし、境界条件により両端の対角成分は、

$$\mathcal{X}_{11} = \mp \left(\frac{\mathbf{X}_C + \mathbf{X}_S}{2} \right)_{1-\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{S}} + (\mathbf{X}_K)_1 \quad (4.88)$$

$$\mathcal{X}_{N_{cell}N_{cell}} = (\mathbf{X}_K)_{N_{cell}} \mp \left(\frac{\mathbf{X}_C - \mathbf{X}_S}{2} \right)_{N_{cell}+\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{S}} \quad (4.89)$$

となる。ここで \mp の上側のマイナス記号は電氣的短絡面を、下側のプラス記号は磁氣的短絡面を表している。

以上の結果から、非周期構造をオープンモード展開した場合の固有値方程式(4.79)の行列 \mathcal{X} を周期構造の行列 $\mathbf{X}_K, \mathbf{X}_C, \mathbf{X}_S$ で表すことができる。したがって、3.3.3節の周期構造のオープンモード展開の結果を用いて行列 \mathcal{X} を評価することができる。更に、周期構造の行列 \mathbf{X} はエルミートであるから、これらの行列には以下の性質がある。

$$\mathbf{X}_K^\dagger = \mathbf{X}_K \quad (4.90)$$

$$\mathbf{X}_C^\dagger = \mathbf{X}_C \quad (4.91)$$

$$\mathbf{X}_S^\dagger = -\mathbf{X}_S \quad (4.92)$$

したがって、行列 \mathcal{X} もエルミート行列になる。

4.2.7 キック因子の計算

本節では、双極モードのキック因子のみ取り扱う。双極モードのキック因子は、

$$\tilde{k} = \frac{c|V|^2}{4a^2\omega U} \quad (4.93)$$

と定義されている(1.2.2節)。ここで、 c, a, ω, U は、それぞれ光速、ディスク孔またはビームパイプ部の最小半径、周波数、蓄積エネルギー(stored energy)である。また、電圧 V は

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} E_z(z, r=a) e^{ikz} dz \quad (4.94)$$

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (4.95)$$

である。 $E_z(z, r = a)$ は $r = a$ の場所での電場の z 方向成分である。この積分経路を図4.5(a)に示す。

ふつう、積分は $r = a$ の場所で行われるが、つぎに定義する V' を用いると $r \leq a$ であればどこで積分してもキック因子を評価できる。

$$\tilde{k} = \frac{c|V'|^2}{4\omega U} \quad (4.96)$$

$$V' = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} E_z(z, r = r_0)e^{ikz} dz}{r_0} \quad \text{for } r_0 \leq a \quad (4.97)$$

これは、 $r_0 \leq a$ であれば

$$|V'|^2 = r_0 \text{に依存せず一定} \quad (4.98)$$

が成り立つことから言える。

しかし、本論文で取り扱っている非周期構造の場合、両端にビームパイプが無いので最小半径 a がゼロとなり、キック因子の計算ができない。そこで、積分経路を図4.5(b)のようにする。この場合の電圧 \hat{V}' は、

$$\hat{V}' = \frac{\int E_z(z, r)e^{ikz} dz}{r} \quad (4.99)$$

から計算する。もし、セル数が多くセルごとのディスク孔の変化が小さいならば、

$$|V'|^2 \cong |\hat{V}'|^2 \quad (4.100)$$

となるであろう。この近似が成り立つならば、本論文で取り扱っているビームパイプのない非周期構造のキック因子を、

$$\tilde{k} = \frac{c|\hat{V}'|^2}{4\omega U} \quad (4.101)$$

としても大きな誤差は生じない。

行列 \mathcal{X} の固有値や固有ベクトルを計算することにより、非周期構造の共振モードの周波数や電磁場が得られ、式(4.101)に従いキック因子が計算できる。キック因子の詳細な計算方法については付録Gを参照のこと。

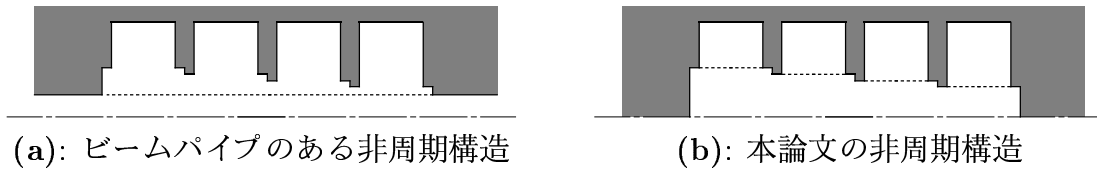


図4.5: 非周期構造の積分経路。図中点線に沿って E_z の積分を行う。

4.3 21 セル-ディスク孔径線形変化構造の評価

前節で導かれたオープンモード展開を検証するために、セルごとに寸法の異なる 21 セルの構造に対する評価に関して、MAFIA との比較を行う。MAFIA の計算は SLAC の Kwok Ko により行われた [37]。オープンモード展開では、セル内の電磁場を 8 個のオープンモードで展開して加速管内の共振モードを計算した。

4.3.1 MAFIA とオープンモード展開の計算

MAFIA の 2 次元の電磁場計算を用いると、ある程度の数の加速セルから構成される非周期構造について計算できる。しかし、周波数分散構造のように 100~200 個の加速セルから構成され、その形状が μm オーダーで変わる構造については計算は不可能である。

一方、オープンモード展開の方は非周期構造が 1 個から非常に多くのセルで構成されても計算できる。通常、150 個のセルから成る周波数分散構造を 8 個のモードで展開して 1200 個の共振モードを計算しているが、HITAC M880 で CPU 時間は 15 分程度で全く問題がない。多くのセルを計算できる反面、セル間の形状変化が大きいと近似の度合いが大きくなり計算誤差が大きくなる。

これらの異なる特徴を持つ 2 つの計算コードを比較するために、図 4.6 に示す非周期構造の共振周波数とキック因子の計算が行われた。この構造は、21 個の加速セルから構成され、そのディスク孔の大きさは入口から出口にわたり $a=3.0\sim 6.0[\text{mm}]$ まで $0.15[\text{mm}]$ づつ変化している。他方、ディスクの厚さは $t=2.0[\text{mm}]$ と入口から出口まで一定であり、セル長も $D=8.7474[\text{mm}]$ と一定である。セル内径 b は、加速モード ($2\pi/3$ モード) の周波数が $11.424[\text{GHz}]$ となるようにセルごとに変えている。この程度の加速セル数および形状変化であれば、MAFIA の 2 次元で計算可能である。

4.3.2 計算結果

オープンモード展開と MAFIA の共振周波数の計算結果を図 4.7(a) に、その差を (b) に示す。この図より、 TM_{110} -like と TE_{111} -like から主に構成される 42 番目のモードまでは、両者の周波数の差は 0.2% 程度である。3 番目以降の高次モードの成分が大きい 42~70 番目の周波数の差は 1% 程度である。大きなキック因子をもつ TM_{110} -like の成分が大きく比較的周波数の低いモードの場合、MAFIA とオープンモード展開は非常に良い一致を示していることがわかる。

さらに、両方の計算によるキック因子の結果を図 4.8 と表 4.2 に示す。これらより、比較的キック因子の大きいモードでは両方の計算の差は 1% 以内であり、良い一致を示している。一方、キック因子の小さいモードではオープンモード展開の方が数十% 程度低い値を示す。これらのモードは主にキック因子の小さい TE_{111} -like から構成され、キック因子の大きなモードが少しでも混入すると大きな誤差が生じる。これが、この不一致の原因と推測している。このようなことが生じるのは非常にキック因子が小さいモードの場合に限られるので、実際問題となるウェーク関数にはほとんど影響を与えない。

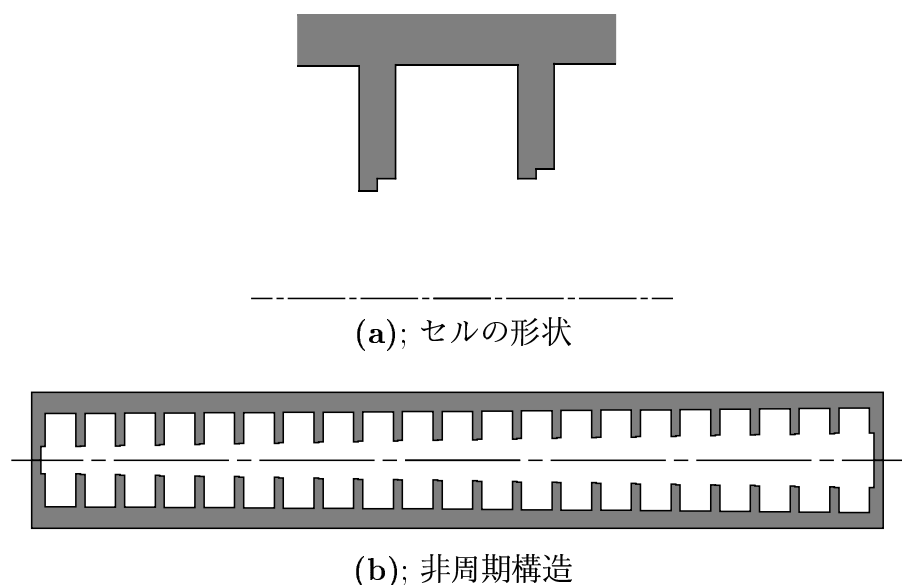


図 4.6: 計算した非周期構造。MAFIA で計算する場合、ディスク孔はディスクの中心で変化させている。

本小節より、オープンモード展開と MAFIA の計算結果は良い一致を示すことがわかる。これによりオープンモード展開の有効性が確認でき、以降の実際的な周波数分散構造の計算に使用可能と考えられる。

4.4 周波数分散構造ウェーク場

4.4.1 周波数分散構造の形状

本論文で扱う周波数分散構造は、各セルごとにディスク孔 a 、セル半径 b 、セル長 D 、ディスク厚 t の 4 個の寸法により決まる。しかし、セル長 D は加速モード ($2\pi/3$ モード、 $11.424[\text{GHz}]$) の位相速度を光速 c にすることより一意的に決まり、 b はセルの加速モードの周波数を調整するために用いる。したがって、フリーパラメーターはディスクの寸法のパラメーターである $\{a, t\}$ である。

もし、周波数分散構造を構成する加速セル間のカップリングが無く、全ての加速セルの HEM_{1x} のキック因子が同じならば、 HEM_{1x} が寄与するウェーク関数のフーリエ変換は、周波数に対するそのモードの密度分布になるだろう。実際の周波数分散構造では比較的大きなカップリングがあり加速セルによってモードのキック因子は異なるが、比較的短い時間ならばそれはよい近似であろう。この近似が成り立つとき、モードの密度分布をガウス分布にすれば、ウェーク関数（正確にはその絶対値の包絡線）はガウス分布の形で減衰するであろう。そこで本研究では、周波数分散構造を構成する各セルがローカルに周期構造を構成したときの同期モードを周波数の密度分布がガウス分布になるようにした。

本節で計算する周波数分散構造は 150 個のセルから構成され、入口から出口にわたって

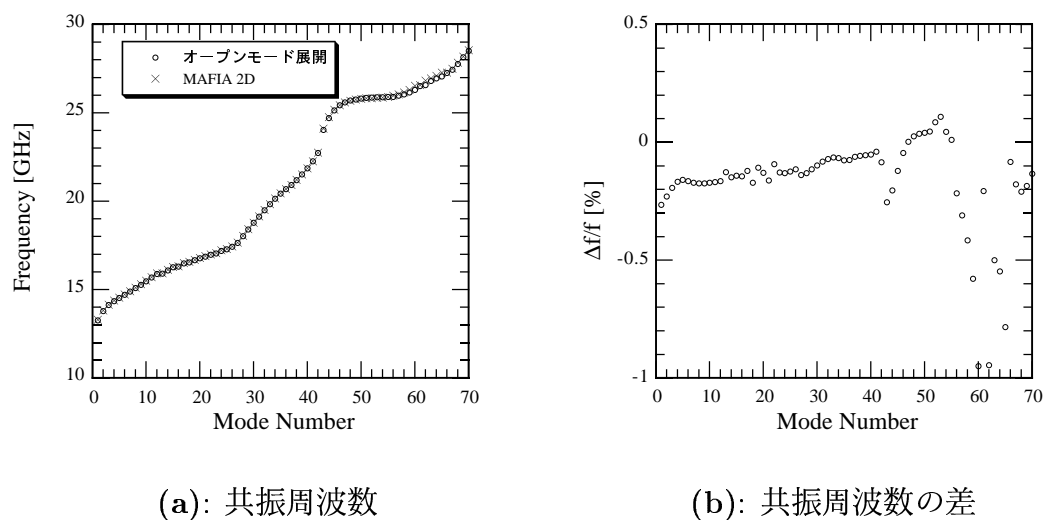


図 4.7: MAFIA とオープンモード展開の共振周波数。横軸は周波数の低い順に並べたモードの番号である。

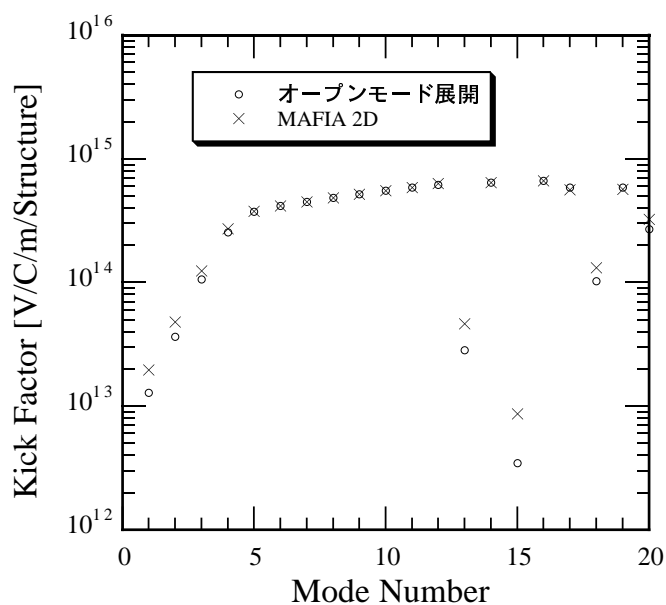


図 4.8: MAFIA とオープンモード展開で計算されたキック因子。横軸は周波数の低い順に並べたモードの番号である。

表 4.2: MAFIA とオープンモード展開の計算結果の比較。周波数の低い方のモードから 21 番目まで MAFIA で計算し、オープンモード展開と比較を行った。

	オープンモード展開		MAFIA 2次元		計算結果の差	
	周波数 [GHz]	キック因子 [V/C/m/Structure]	周波数 [GHz]	キック因子 [V/C/m/Structure]	周波数 [%]	キック因子 [%]
1	13.274	1.2916×10^{13}	13.307	1.9632×10^{13}	-0.25	-34.21
2	13.791	3.6516×10^{13}	13.819	4.8257×10^{13}	-0.20	-24.33
3	14.130	1.0599×10^{14}	14.151	1.2444×10^{14}	-0.15	-14.82
4	14.359	2.5579×10^{14}	14.375	2.7346×10^{14}	-0.11	-6.46
5	14.537	3.7474×10^{14}	14.552	3.7786×10^{14}	-0.10	-0.82
6	14.712	4.1656×10^{14}	14.728	4.1581×10^{14}	-0.10	0.18
7	14.895	4.5049×10^{14}	14.913	4.4986×10^{14}	-0.11	0.14
8	15.086	4.8459×10^{14}	15.104	4.8342×10^{14}	-0.12	0.24
9	15.283	5.1994×10^{14}	15.303	5.1928×10^{14}	-0.12	0.06
10	15.485	5.5442×10^{14}	15.505	5.5429×10^{14}	-0.12	0.02
11	15.691	5.8754×10^{14}	15.711	5.8513×10^{14}	-0.12	0.41
12	15.897	6.1866×10^{14}	15.917	6.3450×10^{14}	-0.12	-2.49
13	15.914	2.8307×10^{13}	15.921	4.6244×10^{13}	-0.04	-38.78
14	16.101	6.4208×10^{14}	16.117	6.4062×10^{14}	-0.09	0.22
15	16.265	3.4658×10^{12}	16.275	8.6949×10^{12}	-0.06	-60.14
16	16.301	6.6340×10^{14}	16.317	6.6397×10^{14}	-0.09	-0.08
17	16.487	5.8539×10^{14}	16.499	5.6147×10^{14}	-0.07	4.25
18	16.546	1.0301×10^{14}	16.564	1.3186×10^{14}	-0.10	-21.87
19	16.668	5.8517×10^{14}	16.678	5.6840×10^{14}	-0.06	2.95
20	16.781	2.7124×10^{14}	16.794	3.2418×10^{14}	-0.07	-16.32
21	16.871	5.0468×10^{14}	16.890	4.9788×10^{14}	-0.11	1.36

の各セルが周期構造を構成したときの分散関係は図 4.9 のようになる。この分散関係の曲線群の中で、最もキック因子の大きい HEM_{11} モードと比較的キック因子が大きくディスク孔 a にその周波数の依存が小さい HEM_{16} モードの同期モードの密度分布がガウス分布になっている。この分布は、ディスク孔 a とディスク厚 t を調整することにより作った。本節で計算する周波数分散構造の入口から出口にわたってのディスク孔 a とディスク厚 t の寸法変化を図 4.10 に示す。

表 4.3: 計算する周波数分散構造の HEM_{11} と HEM_{16} の密度分布

項目	記号	単位	HEM_{11}	HEM_{16}
中心周波数	f_{cent}	GHz	15.6	36.3
標準偏差	σf	GHz	0.35	0.26
	$\sigma f / f_{cent}$	%	2.2	0.71
全幅	Δf	GHz	1.75	1.3
	$\Delta f / f_{cent}$	%	11.2	3.5

4.4.2 オープンモード展開による周波数分散構造のウェーク関数の計算

オープンモード展開

周波数分散構造の共振モードをオープンモード展開を用いて計算する場合、入口から出口にわたっての全てのセルで、式 (4.78) 中のセルの特徴を表す行列 $\mathbf{X}_K, \mathbf{X}_C, \mathbf{X}_S$ の値が必要である。しかし、これらの値を各セルごとに計算すると非常に時間 (CPU Time) がかかる。そこで本研究では、ディスク孔 a やディスク厚 t を適当な間隔で変えてそれらの行列の値を予め計算しておき、任意の $\{a, t\}$ での行列はそれらをスプライン関数で補間することにより求めた。ディスク孔 a を $a=2.5\sim 6.0$ [mm] まで 0.5 [mm] 間隔で、ディスク厚 t は $t=1.0\sim 3.0$ [mm] まで 0.5 [mm] 間隔でそれらの行列の計算を行った。

本研究では、周波数分散構造のセルの電磁場をセルごとの 8 個のオープンモードで展開し、共振モードの計算を行った。150 個の加速セルを 8 個のオープンモードで展開するので、オープンモード展開では 1200 個の共振モードが計算される。その結果を用いてウェーク関数を求めた。図 4.11 に展開に用いたオープンモード \mathbf{e}_j の代表的な電場分布を示す。

オープンモード展開の計算結果

オープンモード展開により計算された周波数分散構造のキック因子の分布を図 4.12 に示す。この図のキック因子の分布には、15.5, 21, 23~26, 31 付近に 2 個, 36, 40, 44, [GHz] に 8 個の比較的大きな分布のピークがある。これらキック因子のピークの周波数は、図 4.9 に示される各セルの分散関係の同期モードの周波数付近にある。このことから、周波数分散構造の比較的低い空洞モード (本章の計算では HEM_{18} まで) に関するモードのキック因

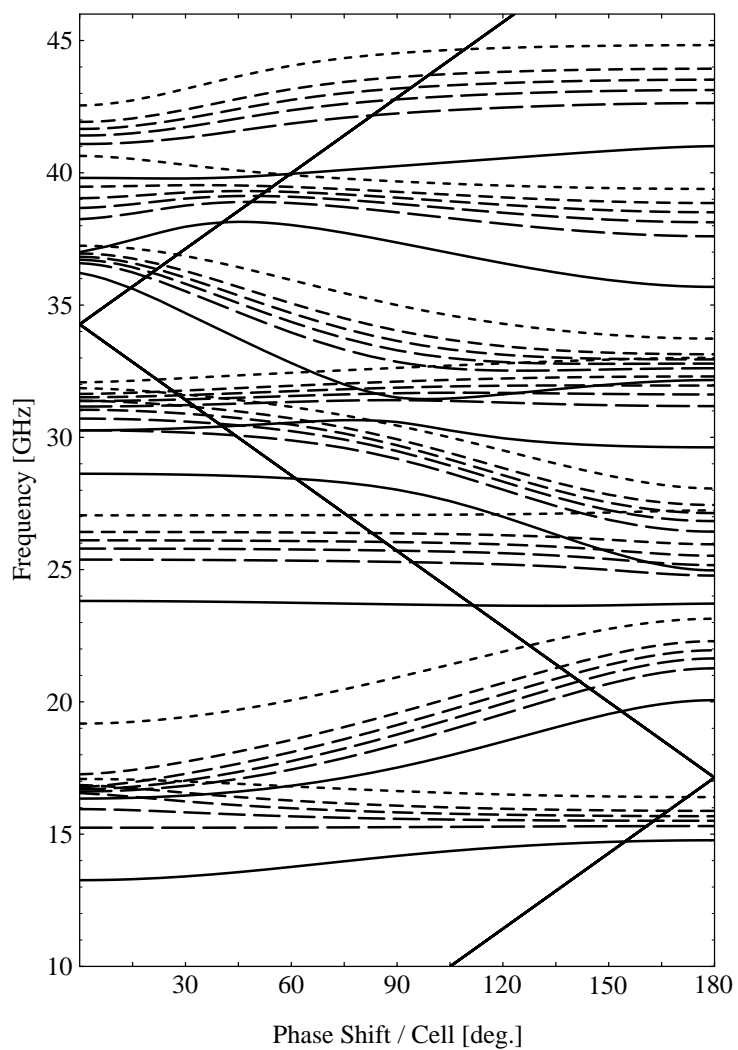
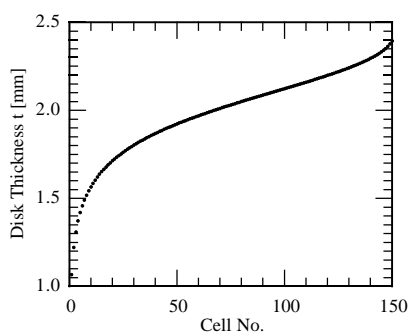
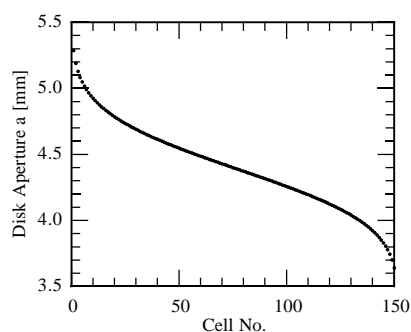


図 4.9: 周波数分散構造のセルの分散関係。実線が1番目のセル、破線の実線部分が短くなるに従い30, 60, 90, 120, 150番目のセルが周期構造を形成する場合の分散曲線を示している。

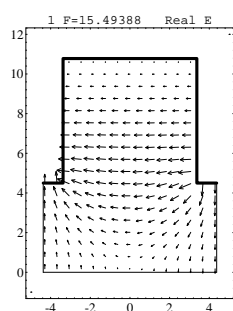


(a); ディスク厚 t の分布

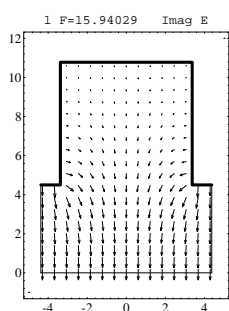


(b); ディスク孔 a の分布

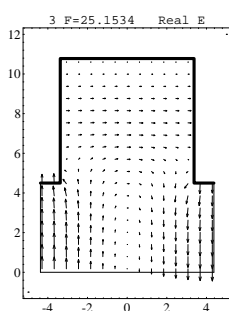
図 4.10: 周波数分散構造の形状。セル長 $D=8.7474[\text{mm}]$ 、セル半径 b は加速モードの周波数が $11.424[\text{GHz}]$ になるようにしている。



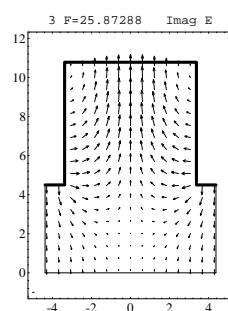
(a); open 1 (\acute{e}_1)



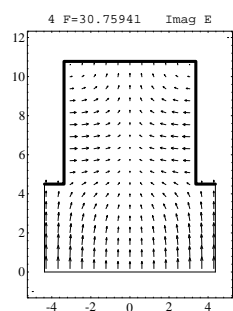
(b); open 2 (\acute{e}_2)



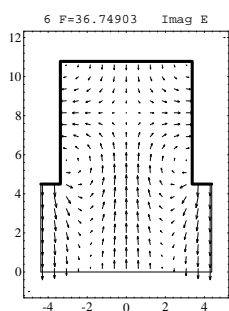
(c); open 3 (\acute{e}_3)



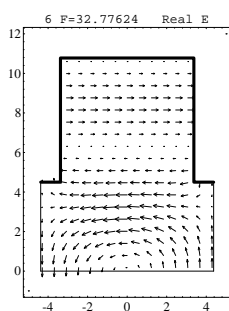
(d); open 4 (\acute{e}_4)



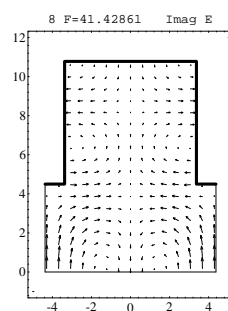
(e); open 5 (\acute{e}_5)



(f); open 6 (\acute{e}_6)



(g); open 7 (\acute{e}_7)



(h); open 8 (\acute{e}_8)

図 4.11: オープンモードの電場分布。ディスク形状 ($a=4.5[\text{mm}]$, $t=2.0[\text{mm}]$)。

子の分布のピークは、それを構成している各セルの同期モードの周波数付近に存在することがわかる。

またいくつかのモードに対する各セルのオープンモードの成分（行列 \mathbf{A} の固有ベクトル）を図4.13, 4.14に示す。キック因子の非常に大きい15~16[GHz]のモード（図4.13の21, 41, 61, 81番目のモード）の場合、1番目と2番目のオープンモードの成分が圧倒的に大きい。このことは、二重パスバンド等価回路モデルでこれらの非常にキック因子の大きいモードは、取り扱い可能であることを示している。しかし、図4.13の141番目のモードになると、4番目のオープンモードの寄与が現れてきており、二重パスバンド等価回路モデルでの取り扱いに問題が生じることを示している。またそれ以降のモードになると、ほとんどのモードが3個以上のオープンモードから構成される。低次のオープンモードに比べて、高次のオープンモードでは周波数差が小さく相互に結合しやすいことによると考えられる。

15.5[GHz]付近についてキック因子の大きい、36[GHz]付近のオープンモードの成分の分布は、図4.14の879番目のモードであり、特徴的である。入口から出口に向かって、セル間位相差が $\phi \cong \pi/15$ から、 $\phi \cong \pi/5$ に徐々に変化している。36[GHz]のセルの分散関係を見ると、入口付近のセルから出口付近に従って、6番目のモードのセル間の位相差が大体その値になっている。また、分散関係中のビームの速度（光速）を表す $v_p=c$ の線も $\phi \cong \pi/12$ にあるので、この共振モードのキック因子が大きくなっている。

15~16[GHz]のキック因子の大きいモードの場合、電磁場は加速管の中心付近にトラップされている。したがって、カップラーセルの影響を全く受けないので、本章のようにカップラーセルの効果を無視した計算でも、その影響は全く入ってこない。

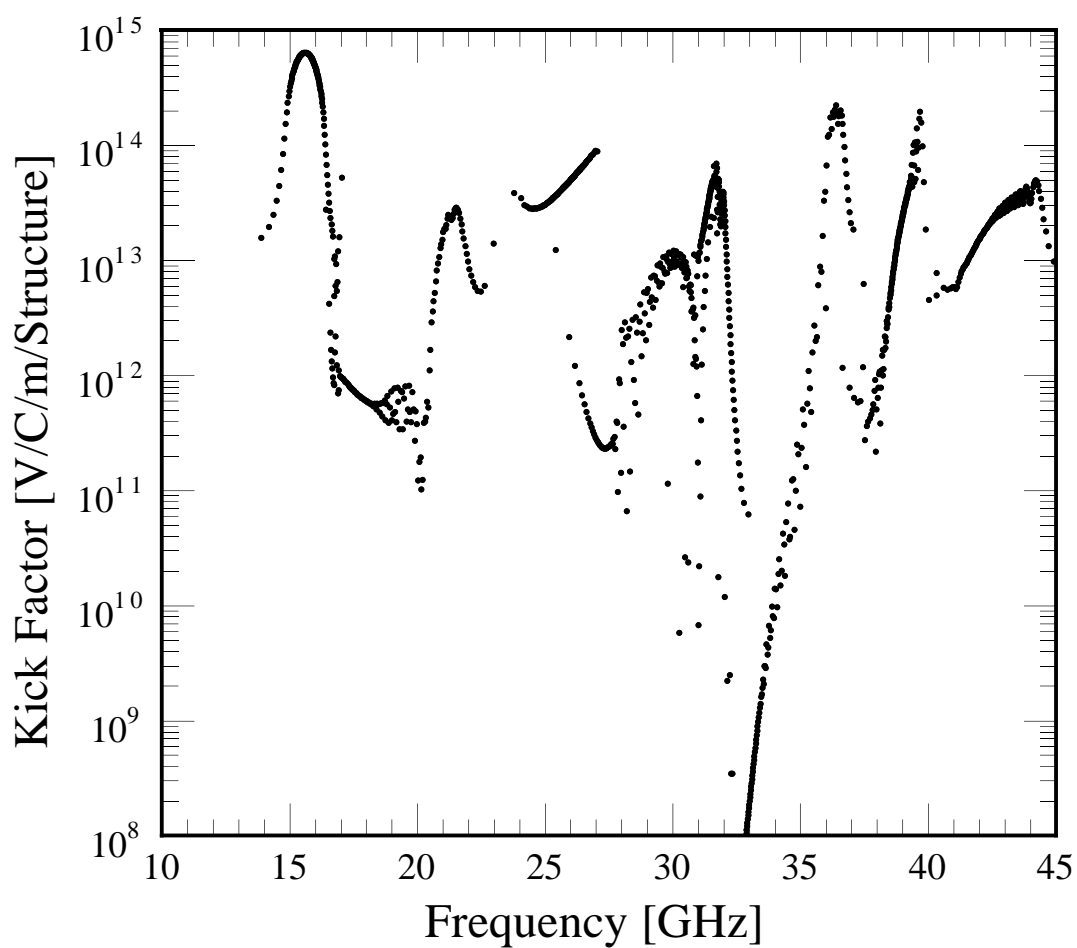


図 4.12: 周波数分散構造のキック因子の分布。150 セルから構成される周波数分散構造をセルごと 8 個のオープンモードで展開して計算した。1200 個の共振モードを計算している。

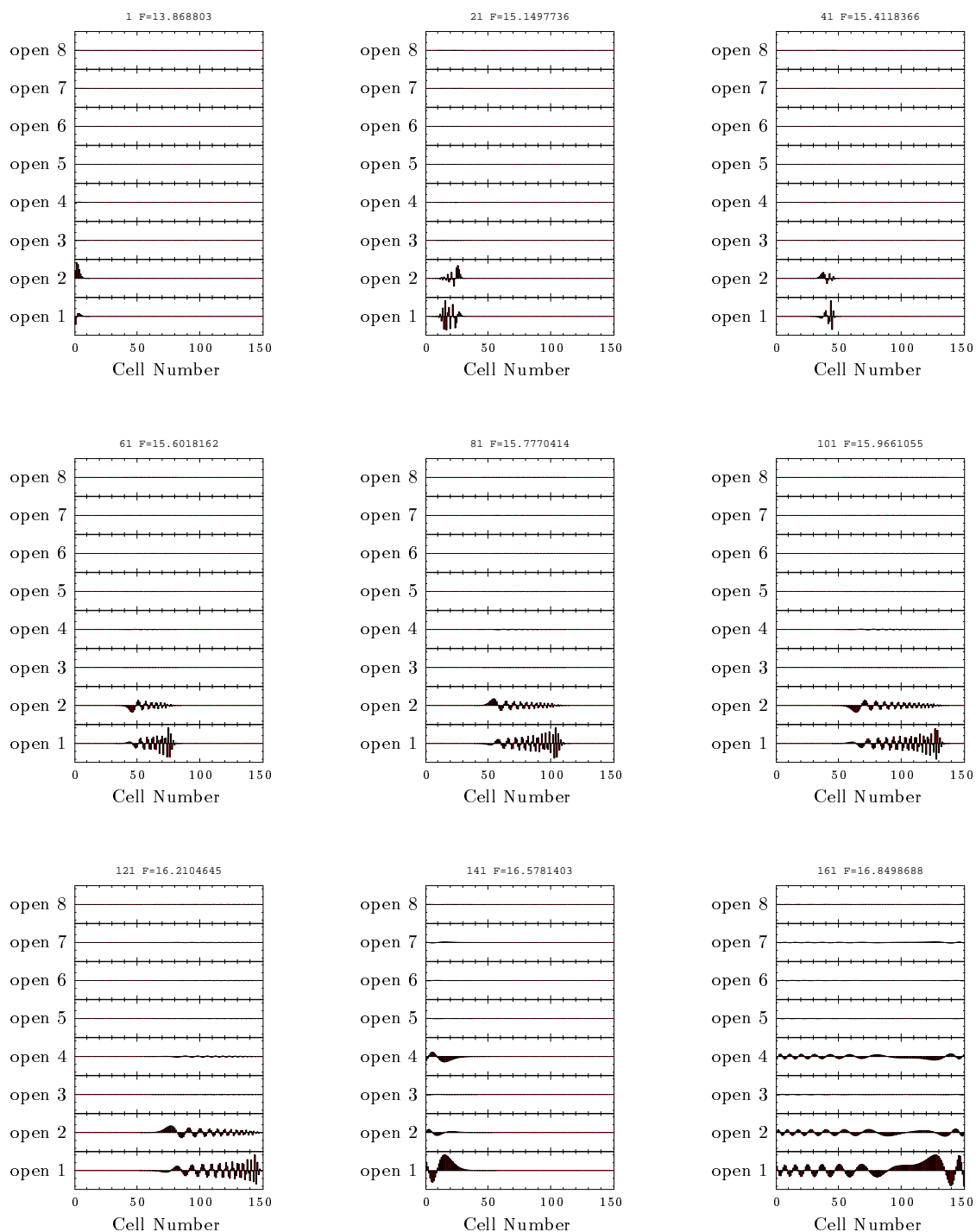


図 4.13: 周波数分散構造の固有ベクトル。横軸はセルの番号、縦軸はオープンモードの固有ベクトルの成分を示す。固有ベクトルの最大値を1に規格化している。各グラフ上部の数字は、共振モードの番号と周波数である。

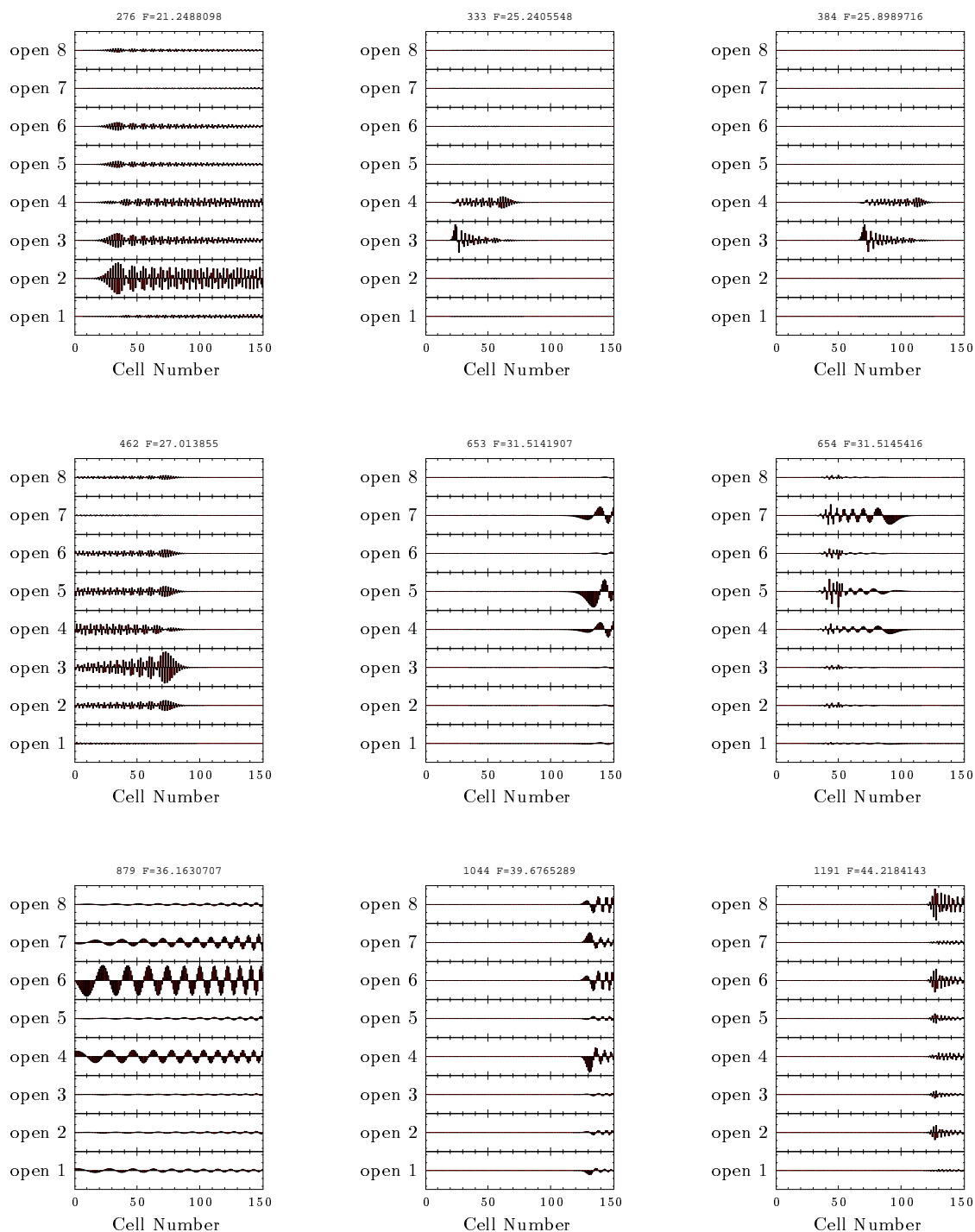


図 4.14: 周波数分散構造の固有ベクトル。横軸はセルの番号、縦軸はオープンモードの固有ベクトルの成分を示す。固有ベクトルの最大値を1に規格化している。各グラフ上部の数字は、共振モードの番号と周波数である。

周波数分散構造のウェーク関数

双極モードのキック因子 $\tilde{k}_{\perp 1n}$ とそのモードの周波数 ω_{1n} から、ウェーク関数は次式によって計算できる(1.2.2節参照)。

$$W_{\perp 1}(t) = 2 \sum_n \tilde{k}_{\perp 1n} \sin(\omega_{1n} t) \quad (4.102)$$

図4.12に示したキック因子の結果を用いて、周波数分散構造のウェーク関数の計算を行った。計算されたウェーク関数の絶対値の包絡線を図4.17に示す。

この図から、次のバンチの位置(1.4[nsec]後)のウェーク関数は、1%程度まで減衰していることがわかる。極小値は10[nsec]付近にあり、以降ウェーク関数は徐々に大きくなっている。25[nsec]付近にウェーク関数のバンチが存在し、115[nsec]までウェーク関数は増大し続け、そこで再び急激に1桁程度減衰している。

これらの振る舞いの原因を探るために、キック因子を8個の領域に分けそれぞれのウェーク関数の計算を行った。その結果を図4.18に示す。この計算結果より、25[nsec]付近のウェーク関数のバンチは、33[GHz]~37.5[GHz]のモードが原因となっていることがわかる。これは先の分散関係とキック因子の分布の議論からHEM₁₆が関係しているモードである。このバンチは比較的大きく、リニアコライダの加速管では問題である¹。HEM₁₆について再度検討して、これを減衰させるためのディスク形状の最適値を探る必要がある。

一方、ウェーク関数が115[nsec]付近で急激に1桁程度減衰している原因は、12~18[GHz]のキック因子の影響である。これらのモードは、丁度115[nsec]付近で相殺の効果が無くなり、再び元($t=0$)に近い状態に戻っているためである。周波数分散構造では各モード同士の相殺の効果を利用してウェーク関数を小さくしているが、有限個のモードでこれを行う場合、いずれ相殺の効果は無くなり再び元に近い状態に再帰する。この元に戻る時間を再帰時間 t_{rec} といい、次式により計算することができる。

$$t_{rec} \cong \frac{1}{\Delta f} \quad (4.103)$$

ここで、 Δf は隣り合うモード間の周波数差である。12~18[GHz]のモードの場合、図4.15に示すようにこの値は、111[nsec]になり、ウェーク関数が再帰する時間とほぼ一致する。

以上のウェーク関数の計算の結果をまとめる。本章で計算した周波数分散構造をJLCに適用する場合、以下の問題がある。

- HEM₁₆が関係しているモードが原因となって、25[nsec]付近にウェーク関数のバンチがある。
- JLCのパルストレーン長124[nsec]と同程度の時間で再帰現象が生じ、周波数分散構造の相殺の効果が無くなっている。

¹リニアコライダでは、ウェーク関数を 1×10^{15} [V/C/m/Structure]程度まで抑える必要がある。

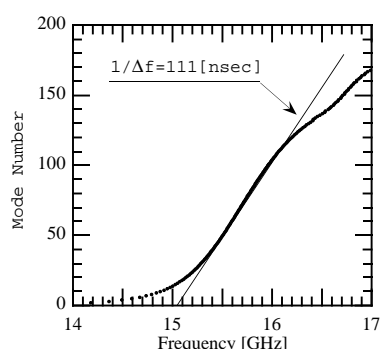
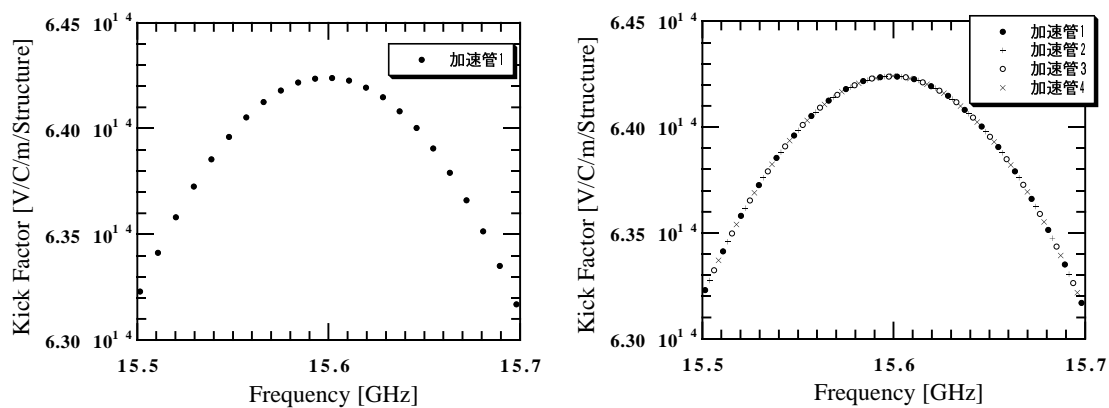


図 4.15: 低次のモードのモード間の周波数差

周波数分散構造を組み合わせる効果

JLC のパルスレイン長は、 $124[\text{nsec}]$ である。この時間まで十分ウェーク関数を減衰させ、それを維持させるためには、再帰時間 t_{rec} を十分長くする必要がある。その為には、 $12\sim 18[\text{GHz}]$ のモード数を増やすか周波数分布の広がりを小さくする必要がある。 $12\sim 18[\text{GHz}]$ のモード数を増やすためには、加速管の加速セルの数を増やす必要があり、それには限界がある。一方、 $12\sim 18[\text{GHz}]$ のモードの周波数分布の広がりを小さくすれば、次のバンチの位置 ($1.4[\text{nsec}]$ 後) でのウェーク関数が大きくなり問題である。これらのことを考えると、1本の加速管でウェーク関数の再帰時間を大幅に長くすることは不可能である。

図 4.16 に示すように、 $12\sim 18[\text{GHz}]$ のモードのキック因子の分布を複数の加速管で作れば再帰時間を長くすることができる。もし、 N_{acc} 本の加速管で同じ分布を作ることができれば、再帰時間は N_{acc} 倍になるであろう。そこで、再帰時間を 4 倍にするために、これまでに計算した周波数分散構造と少しずつ周波数の異なる 3 本の周波数分散構造を計算し、そのウェーク関数を重ね合わせた。その結果を図 4.19 に示す。このことにより再帰時間が 4 倍になったため、 $150[\text{sec}]$ 付近でもウェーク関数は初期値の $1[\%]$ 程度であり、リニアコライダーの要求を満足している。しかし、 $33[\text{GHz}]\sim 37.5[\text{GHz}]$ のモードが原因となっているウェーク関数の増大は依然残っている。リニアコライダーに周波数分散構造を使用するためには、なにか別の方法でこのウェーク関数の増大の問題を解決する必要がある。この問題を解決することは、今後の大きな課題である。



(a): 加速管 1 本の場合

(b): 加速管 4 本の場合

図 4.16: 加速管 1 本の場合と 4 本の場合のキック因子。最もキック因子の大きい 15.6[GHz] 付近のモードを示している。

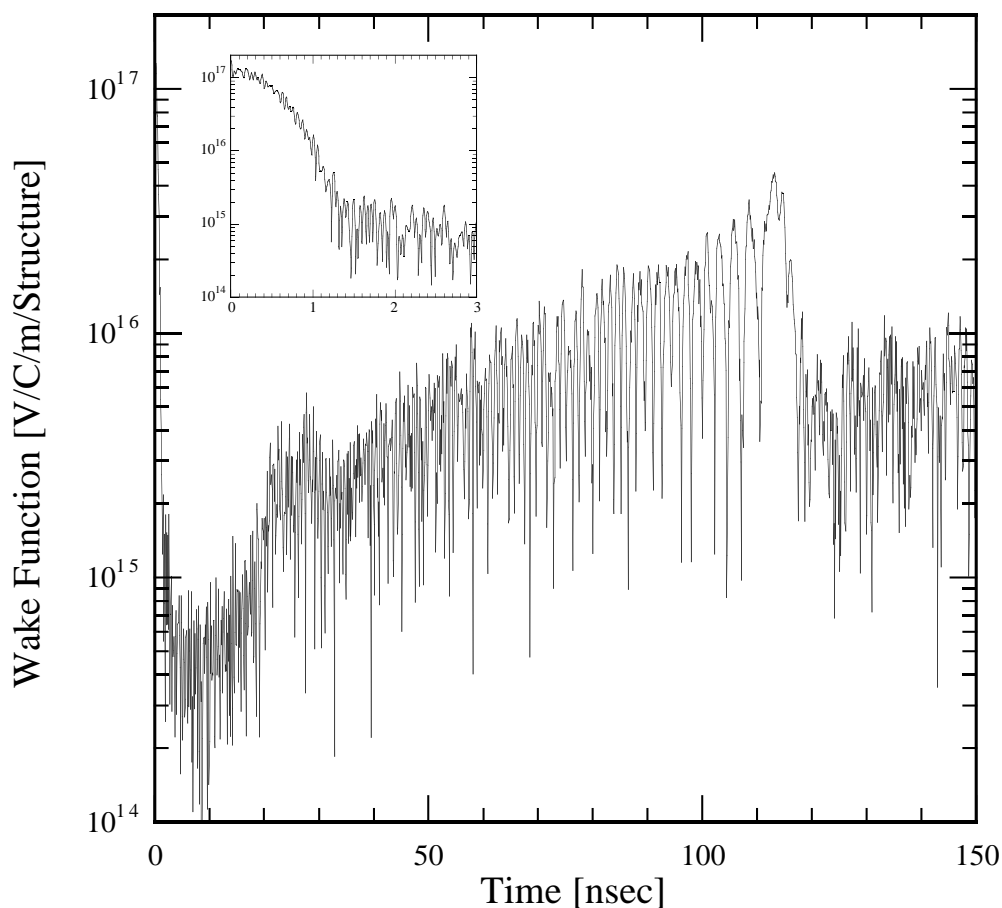


図 4.17: 周波数分散構造のウェーク関数の絶対値の包絡線

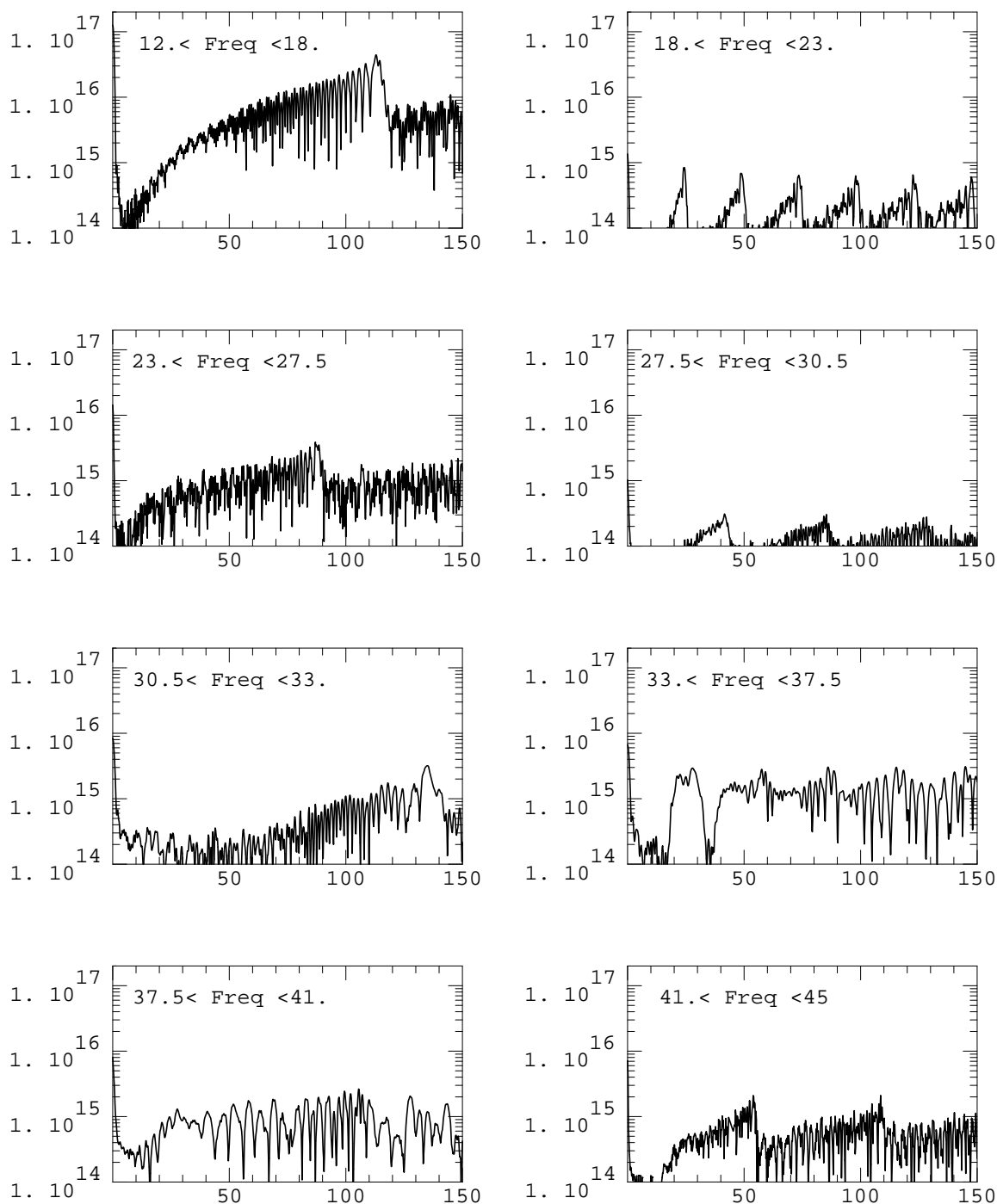


図 4.18: 周波数分散構造の共振モードごとのウェーク関数。縦軸はウェーク関数の絶対値の包絡線 [V/C/m/Structure]、横軸は時間 [nsec] である。図中の Freq は計算しているモードの周波数 [GHz] の範囲を示している。

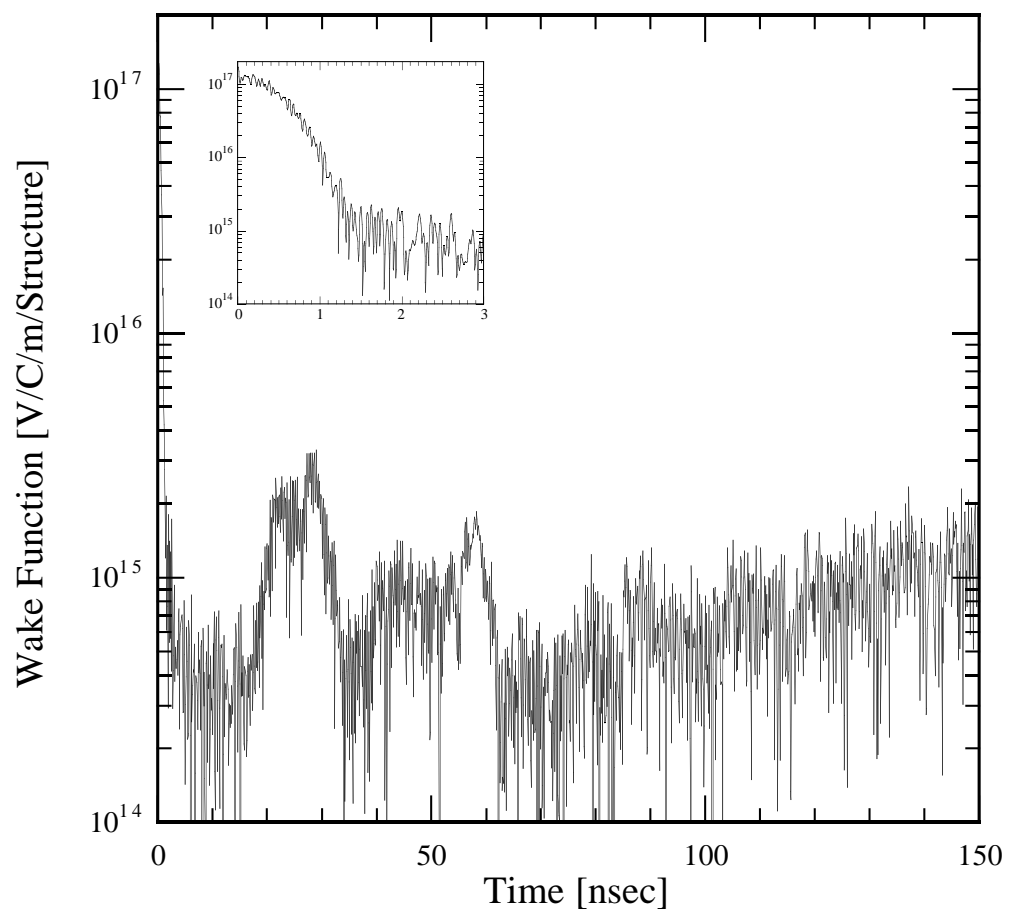


図 4.19: 少しづつ形状の異なる 4 個の周波数分散構造のウェーク関数の絶対値の包絡線

4.4.3 無結合加速セルとの比較

等価回路モデルによる周波数分散構造の解析は、無結合等価回路モデルに始まり、単一パスバンド等価回路モデルを経て二重パスバンド等価回路モデルへと発展した(1.4節参照)。3.4節によれば、オープンモード展開はそれを更に発展させたものと考えられることができる。オープンモード展開も含め、これらの等価回路モデルは加速セルのモードがセル間でカップリングしている描像である。それ故、これらのモデルはセル間のカップリングをより正確に取り入れる方法を研究することにより発展してきた。

本小節では、このカップリングの効果について簡単に論じる。図4.20に、本章で計算している周波数分散構造の低次のモードのキック因子を示す。カップリングを無視した無結合等価回路モデルのキック因子は、図中の各セルの同期モードのキック因子になる。この図より、カップリングの有無によりキック因子の分布が大きく異なることがわかる。加速管の共振モードの電磁場は、カップリングが無いモデルではある1個のセルのみに存在しているが、カップリングを考慮したモデルでは複数の連続したセルに分布することになる。このことが影響して、キック因子の分布に大きな変化をもたらしたと思われる。

これらのキック因子の違いを評価するために、それぞれの周波数の低い方から150個のモードにより生じるウェーク関数を計算した。その結果を図4.21に示す。この図から、1[nsec]までは両者の違いは少ないが、以降は大きく異なることがわかる。このことから、1[nsec]程度までなら無結合等価回路モデルでもウェーク関数の評価はできるが、それ以降の時間ではカップリングを考慮したモデルが必要であると結論できる。

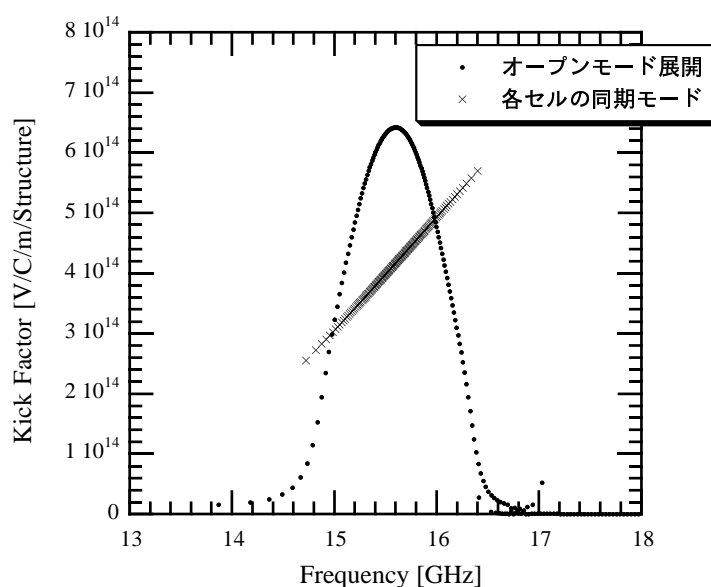


図 4.20: 周波数分散構造の各セルの同期モードのキック因子とオープンモード展開のキック因子。比較的周波数の低いものを図示している。同期モードのキック因子は周波数分散構造を構成する各セルの最低次のものである。

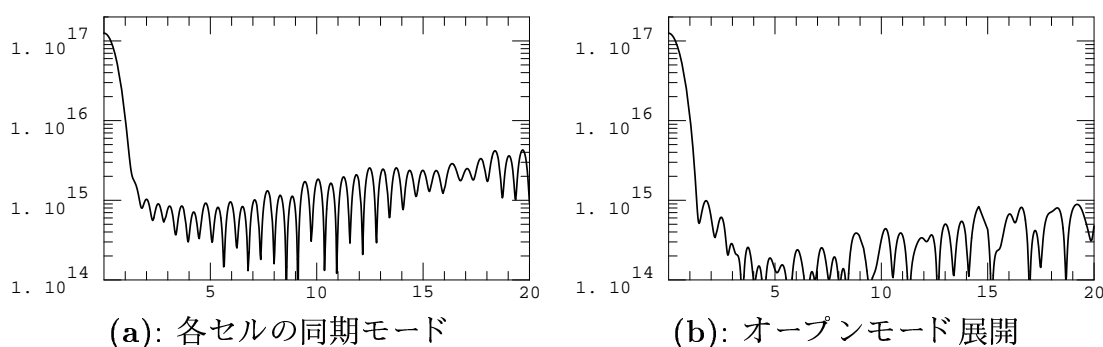


図 4.21: ウェーク関数のカップリングの効果。横軸は時間 [nsec]、縦軸はウェーク関数の絶対値の包絡線 [V/C/m/Structure]。周波数の低い方から 150 個のモードを評価した。

4.5 実機の周波数分散構造との違いと今後の問題

周波数分散構造のウェーク関数は、オープンモード展開を用いて高次のモードも含め計算できることを前節までに示した。しかし、これまでに計算した構造は実機に予定されている加速管と異なる部分も多く、実機のウェーク場の評価には問題が残っている。このうち加速管の壁損失の問題については、ある程度評価を行ったので本節でその結果について述べる。一方、カップラセルの効果や加速セルの形状の問題については、本研究で解決できなかったのが今後の課題として残る。今後、実際のリニアコライダーの加速管の長距離ウェーク場を評価するために、解決すべき課題を本節に示す。

4.5.1 壁損失の効果

実際の加速セルの材質は銅であるため、壁損失がある。JLC で考えなくてはならないウェーク場の時間は 126[nsec] にもなり、その効果は無視できない。第 1 近似としてその効果はキック因子からウェーク場に変換するとき Q 値という形で取り入れることができる。しかし、減衰構造のように非常に Q 値が低い場合、その影響により共振周波数そのものが変わってしまいこの近似は成り立たなくなる。そうすると次の近似として、固有値方程式そのものにこの効果を入れて計算する必要がある [30]。しかし Q 値が 100 以下程度になると、キック因子と Q 値でウェーク場の記述には近似が大きくなり困難が予想される。その場合は、ウェーク場のインピーダンスそのものを用いて記述するべきである。

本論文で取り扱っている周波数分散構造の Q 値は数 1000 程度のため、先に述べたようにキック因子からウェーク場に変換するとき Q 値を取り入れて計算しても良い近似であろう。すなわち、次式のように Q 値を考慮してウェーク関数を計算する。

$$W_{\perp 1}(t) = 2 \sum_n \tilde{k}_{\perp 1 n} \sin(\omega_{1n} t) e^{-\omega_n t / 2Q_n} \quad (4.104)$$

ここで、 Q_n は n 番目の共振モードの Q 値である。

ある共振モードの Q 値¹は、その共振モードのオープンモード展開の展開係数 a_{nl} を用いて次式のように表すことができる。

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{N_{cell}} \sum_{\ell=1}^{N_{open}} \frac{\dot{\omega}_{nl} a_{nl}^2}{\dot{Q}_{nl}} \quad (4.105)$$

ここで、 ω は共振モードの周波数、 $\dot{\omega}_{nl}$ と \dot{Q}_{nl} は n 番目のセルの ℓ 番目のオープンモード角振動数と Q 値である。

本論文で用いたフィールドマッチングのコードでは、 Q 値を計算することができないので必要なオープンモードの Q 値の計算は MAFIA を用いて行った。その結果を表 4.4 に示す。この表から、各オープンモードの Q 値は 6000～23000 もあるので問題となる時間 120[nsec] では、ウェーク関数の減衰は 50%程度しか期待できない。

ディスクの形状が多少変化してもオープンモードの Q 値はウェーク関数を大きく変えるほど変化しないと思われる。それ故、 Q 値を考慮したウェーク関数を評価する場合、全てのセルのオープンモードの Q 値としてこの表の値を用いても良い近似であろう。この仮定の下で、壁損失を考慮したウェーク関数を図 4.22 に示す。図を見てわかるように、 Q 値を考慮すると 120[nsec] の場所にあるバンプは、 Q 値が無限大の場合（図 4.17）に比べ約半分になっている。

表 4.4: オープンモードの Q 値。MAFIA を用いて単加速セル ($t=2.0$ [mm], $a=4.5$ [mm], $b=10.779$ [mm], $D=8.7474$ [mm]) の計算を行った。

オープンモード	周波数 [GHz]	Q 値
1	15.497	6716
2	15.980	7166
3	25.853	6306
4	25.162	14316
5	30.747	12451
6	36.701	11963
7	32.745	15121
8	41.387	23806

4.5.2 今後の課題

本研究では、本章の初めの図 4.1 の周波数分散構造の双極モードによる横方向長距離ウェーク場の評価を行ってきた。しかし、これは実機で予定されている周波数分散構造の形状と

¹ここでは、添字 n を省略し Q と表す。

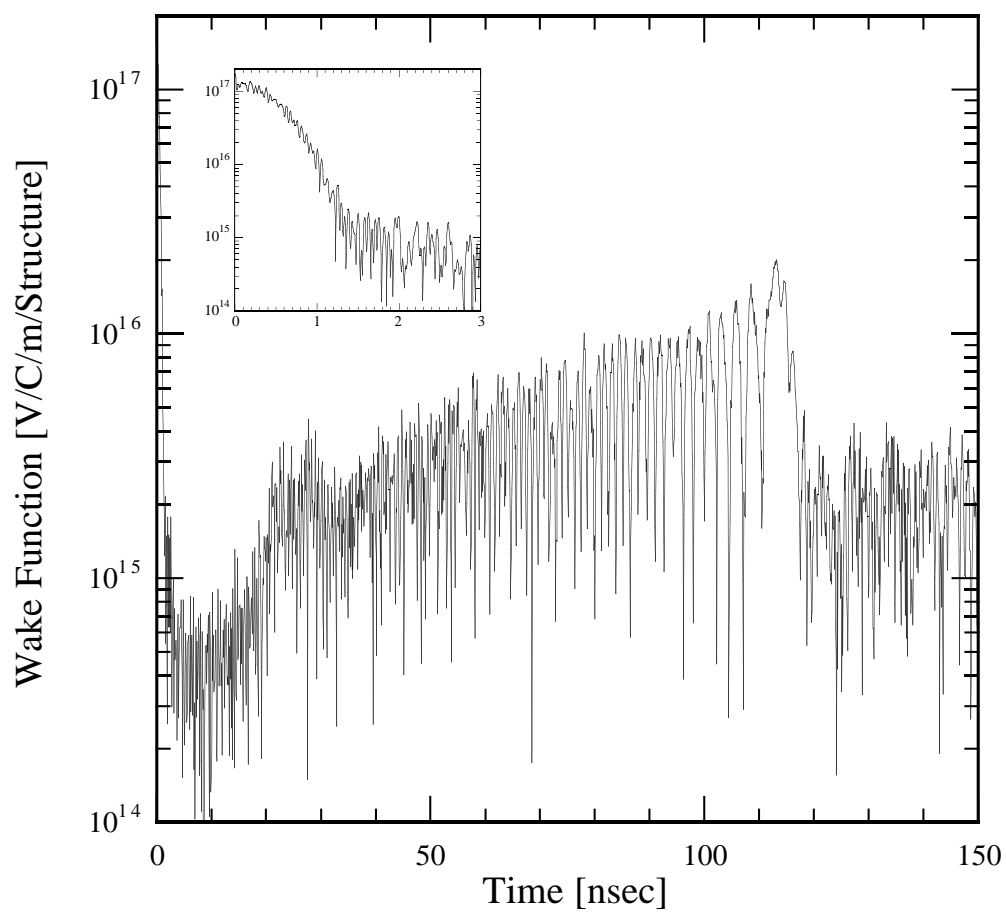


図 4.22: 壁損失を考慮したときの周波数分散構造のウェーク関数の絶対値の包絡線

異なる箇所も多い。実際のリニアコライダーの周波数分散構造を開発する場合、より実機に近い形状でウェーク場を評価する必要がある。その為には、今後、以下に示すような課題を解決する必要がある。

- 実際の加速セルは、両端にカップラーセルがあり、それにはビームパイプとRF入力用の導波管が接続されている。これらを通して周波数分散構造のモードは外部とカップリングしている。この効果を評価する必要がある。最も簡単な方法は、等価的に外部Qという形で近似することである¹。しかし、比較的Q値が低い場合、導波管等の影響によりセル内の電場が乱されるので、この外部Qではその評価は困難であろう。
- 今まで計算した加速セルの形状は、フィールドマッチングで計算ができるように円筒と円環で構成されていたが、実際は図4.23の形状が予定されている。この加速セルから構成される周波数分散構造のウェーク関数を評価するためには、セル間位相差の境界条件が設定でき任意のセル形状を計算できるコードと左右非対称な場合のオープンモード展開の表式を導く必要がある。

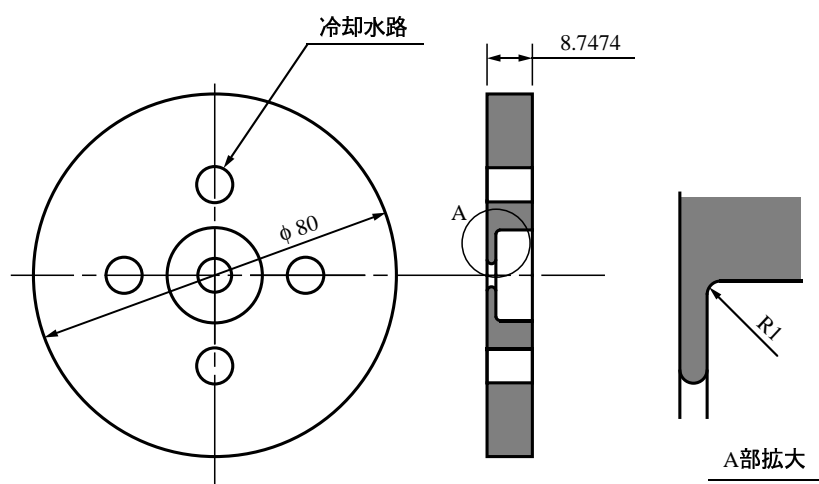


図 4.23: 現在の X-バンド 加速管の加速セル

4.6 加速モード特性

前節までの計算により、双極モードによる長距離ウェーク場を考慮した周波数分散構造の形状を示すことができた。しかし実機の加速管を考える場合、その加速モード特性も同様に考慮する必要がある。そこで、本節では前節の周波数分散構造の加速モード特性を示す。

¹例えば、等価回路モデルにQ値を考慮する。

4.6.1 計算形状

加速モード特性は、より実機に近いものを計算するために、図 4.24に示すようにディスクの先端を丸にして行われた。ただし、この場合ディスク形状 $\{a, t\}$ は、本章で計算している周波数分散構造と同じ寸法としている（図 4.10参照）。

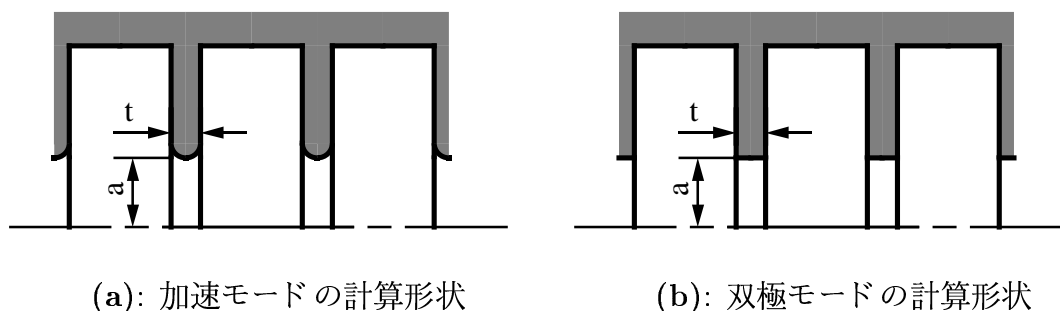


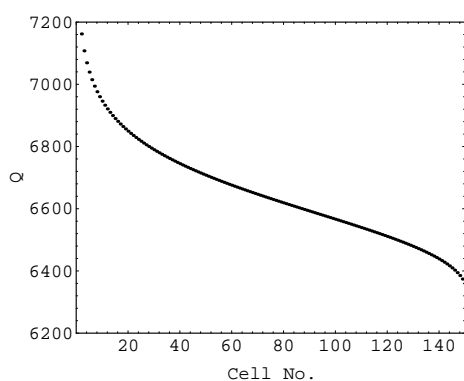
図 4.24: 加速モードおよび双極モードを計算するときのセルの形状

4.6.2 計算結果

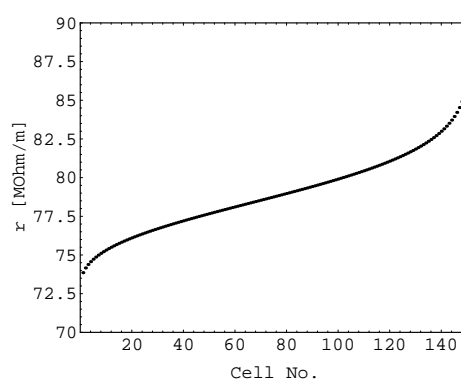
Q 値やシャントインピーダンス等の加速モードのパラメータの評価は、MAFIA や SUPERFISH を用いた。計算結果を表 4.5と図 4.25に示す。

短距離ウェーク場の効果は、ディスク孔 a の -3.5 乗に比例する。表 4.5に示すように、これを考慮した平均ディスク孔 a は 0.166λ になり、KEK 横谷によって示された JLC のパラメータ $a \geq 0.16\lambda$ を満足する [2]。また、充填時間 (filling time) や加速電圧も JLC の加速管では適当な値であると思われる。

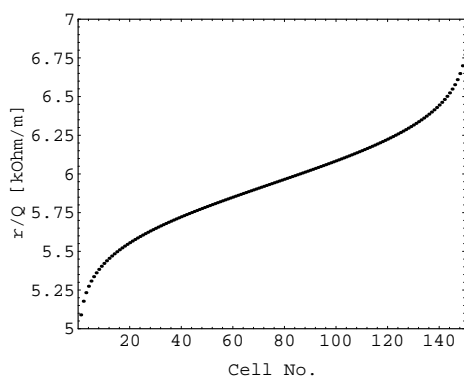
図 4.25(d) から、加速電場は加速管入口で低く出口ではその 1.5 倍になっている。加えて、入口や出口付近で急激な加速電場の変化がある。しかし、図 4.25(e) から、加速管の入口から出口にわたっての最大表面電場の変化は小さい。暗電流や放電の発生は、加速電場よりも最大表面電場の効果の方が大きいと思われる。したがって、入口や出口付近で急激な加速電場の変化はあまり問題が無く、最大表面電場の変化の少ないことの方が重要であろう。その意味では、本節で示した加速管は JLC の加速管として適当な設計であると思われる。



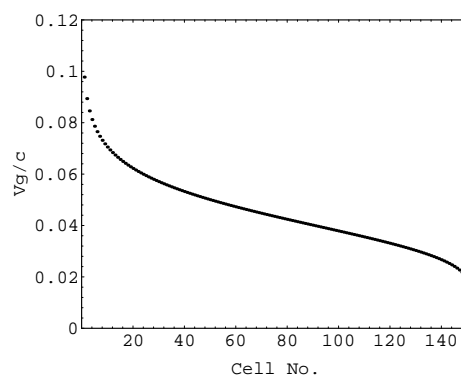
(a); Q 値



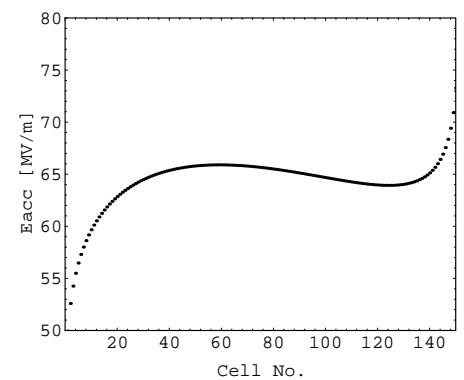
(b); シャントインピーダンス



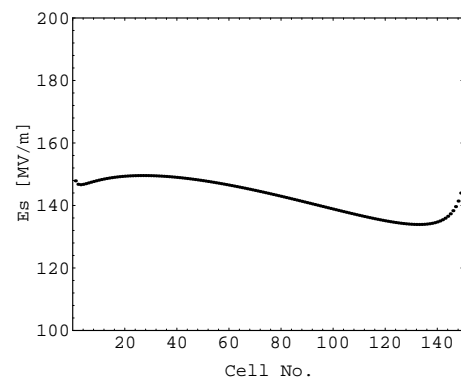
(c); r/Q



(c); 群速度



(a); 加速電場
(input 100MW)



(e); 最大表面電場
(input 100MW)

図 4.25: 周波数分散構造の加速モード特性

表 4.5: 加速モード特性

項目	記号	単位	値
平均ディスク孔	$\langle (a/\lambda)^{-3.5} \rangle^{-1/3.5}$		0.165824
充填時間	T_f	nsec	106.404
加速電圧 (input 100MW)	V_{acc}	MV	84.3924
平均加速電場 (input 100MW)	E_{av}	MV/m	64.3181

第 5 章

周波数分散構造の双極モードの測定

5.1 測定の目的

本論文の第一の主題は、加速管内の電磁場をオープンモード展開により記述することである。周期構造の場合、このオープンモード展開の検証は、フィールドマッチングの計算結果と比較することにより行った。また、ディスクの穴径が線形に変化する 21 セル加速管の場合については、MAFIA の結果と比べることにより検証ができた。しかし、実際にこのオープンモード展開が応用されるのは 4 章で取り扱ったような加速セル毎に μm オーダーで形状が異なる非周期構造の共振モードを評価する場合である。言い換えれば、このような非周期構造を計算する良い方法がなかったので本研究でオープンモード展開を開発した。したがって、非周期構造のオープンモード展開の結果を他の方法と比較し検証をすることは困難である。そこで、測定を行い実験的な検証を試みる。

5.2 測定方法

5.2.1 モデル加速管

モデル加速管を用いて、双極モードの共振周波数と電磁場の分布の測定を行う。共振周波数は、加速セルに電磁場ピックアップ用のアンテナを導入して測定する。また、電磁場分布は、加速管の中に摂動球等を導入し、それによる周波数変化から求める。これらの高周波測定を行う場合、加速管の中に電磁場を乱すアンテナや摂動球を導入しなければならない。これらの影響を少なくするためには、加速セルに比べてこれらの摂動物の体積をできるだけ小さくする必要がある。しかし、アンテナや電磁場測定用の摂動球を小さくすることには限界がある。特に、電磁場測定用の摂動球を小さくすることは技術的な困難が伴い、本研究では直径 0.7[mm] の球に直径 0.2[mm] の穴を開け糸でつることが限界であった。このような理由から、測定に必要な摂動球等の寸法を小さくすることをあきらめ、加速管を大きくすることにした。一方加速管を大きくすると、電磁場測定用の摂動球を移動させる機構が長くなり位置設定精度が悪化する。本研究では、長さ 600[mm] のリニアガイド

を用いるため、加速管の全長はそれ以下でなくてはならない。

これらの条件を考慮に入れると、測定に使うモデル加速管は X-バンドではなく、寸法が丁度その2倍の C-バンドが適当であると判断して、28セル C-バンド周波数分散構造を製作した。また、何回も組み替えて測定することを考慮すると、モデル空洞の材質として銅は不適當である。そこで製作の容易さ、測定時の扱い易さ、そして導電率から、材質はアルミニウムが適当だと判断した。モデル加速管はディスクとシリンダーから構成され、それぞれ公差 $10[\mu\text{m}]$ で製作を行った。加速セルの内径 $2b$ は大体 $40[\text{mm}]$ なので、製作されたモデル加速管の周波数精度は 2.5×10^{-4} 程度である。

モデル加速管の形状は、計算形状と同じようにディスクの先端は角とした。したがって、本論文のオープンモード展開の計算と製作されたモデル加速管の形状との違いは、次の3点である。

1. モデル加速管の両端は、電磁場測定用のビーズを通すための直径 $2[\text{mm}]$ の貫通穴を開けている。
2. モデル加速管の各加速セルには、周波数や位相を測定するためのアンテナ導入用の貫通穴 ($\phi = 1.5[\text{mm}]$) がセル壁に4箇所開いている。しかし、この影響は僅かである。
3. モデル加速管には壁損失があり、Q値は4000程度である。

モデル加速管のディスク厚 t は、加速管の入口から出口にわたって $4.0[\text{mm}]$ 一定とした。ディスク孔の直径 $2a$ の分布は、リニアコライダーの周波数分散構造に近い分布にした。その分布を図5.1に示す。加速モード (TM_{010} -like, $\phi = 2\pi/3$) とその周波数 ($5.712[\text{GHz}]$) よりセル長 D は $17.5[\text{mm}]$ となる。そして、セル内径 b は、各加速セルの加速モードの周波数が $5.712[\text{GHz}]$ になるように調整した。

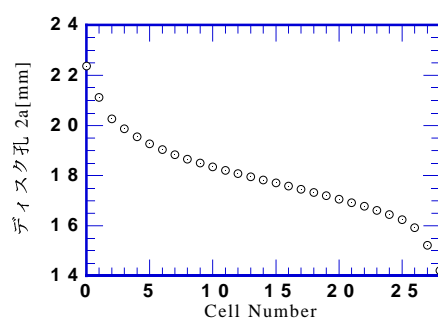


図 5.1: モデル加速管のディスク孔 $2a$ の分布。ただし、ディスク厚は $4.0[\text{mm}]$ に固定。

5.2.2 測定のセットアップ

前章までの計算から、横方向キック因子の大きなモードは比較的周波数の低いところに分布していることがわかる。特に、最もキック因子の大きい HEM_{11} モードは双極モードの

中でも周波数が最も低い。そして、そのモードと密接に関係がある HEM_{12} モードはその次に周波数が低い。周波数分散構造の場合、これらに関係がある共振モードの付近には、他の極（双極モード以外）のモードが存在しないことが分かっている。したがって、これらのモードの周波数測定は比較的容易である。また、周波数の測定が可能であれば、その変化を測定することにより電磁場を求めるビーズ摂動法が原理的に可能である。このようなことから、比較的周波数の低い双極モードの共振周波数と電磁場の測定を行うことにした。モデル加速管は28セルから構成され、そのセルの HEM_{11} モードと HEM_{12} モードに関するモードを測定するので、双極モードの周波数の低い方から56個の共振モードを測定することになる。

加速管の共振周波数は、加速セルにループアンテナを導入して、ネットワークアナライザを用いてその透過電力を測定することにより求める。この場合、 HEM_{11} に対応するモードは、 TM_{110} -like の電磁場分布をしており、加速セル壁では電場の r 方向成分 E_r が無いので、ロッドアンテナではカップルしないためループアンテナが必要である。一方、 HEM_{12} に対応するモードは、 TE_{111} -like の電磁場分布をしているために、ロッドアンテナ・ループアンテナともにカップルする。そこで図5.2のようなループアンテナをセミリジッドケーブル（外導体の外形は直径1.19[mm]）を用いて製作した。周波数を正確に測定するには、アンテナを導入することの影響を極力少なくする必要がある。それには、測定可能限界までアンテナ導入量を少なくして測定するのが望ましく、その為の機構が必要である。本研究では、図5.2に示されるマイクロメーターを用いた機構を使用し、10[μ m]程度でアンテナを動かし測定を行った。

電磁場の分布は、加速管内に摂動物（小さな球やディスク）を導入して、それによる周波数変化を調べるビーズ摂動法により行う [38]。摂動物が大きければ、周波数変化が大きく測定は容易になるが、それによる電磁場を乱す影響が大きくなり、実際の加速管内の電磁場の測定ができなくなる。本研究では、製作可能な最も小さい摂動球とディスクから、数種類の大きさの物を製作した。

共振周波数や電磁場分布を測定するためには、高周波関係の測定を行うネットワークアナライザ、温度・湿度・気圧等の環境を測定する機器、ビーズ摂動法の摂動物を移動させその位置を測定する機器、これらの機器を制御する計算機などが必要である。本研究では、以下に示す機器を用いて測定を行った。これらの計測機器は全て GP-IB により繋がれており、計算機から制御できる。図5.3に示す測定システムで、加速管内の電磁場を測定した。

- 計算機

Macintosh IIfx に GP-IB ボードを入れ全ての測定器をコントロールする。ビーズ摂動法の測定は、C 言語で書かれたプログラムにより全ての機器が制御され自動測定が行われる。

- ネットワークアナライザ

高周波関係の測定を全て行う。

- 温度計

0.01 度の分解能で加速管の温度を測定する。

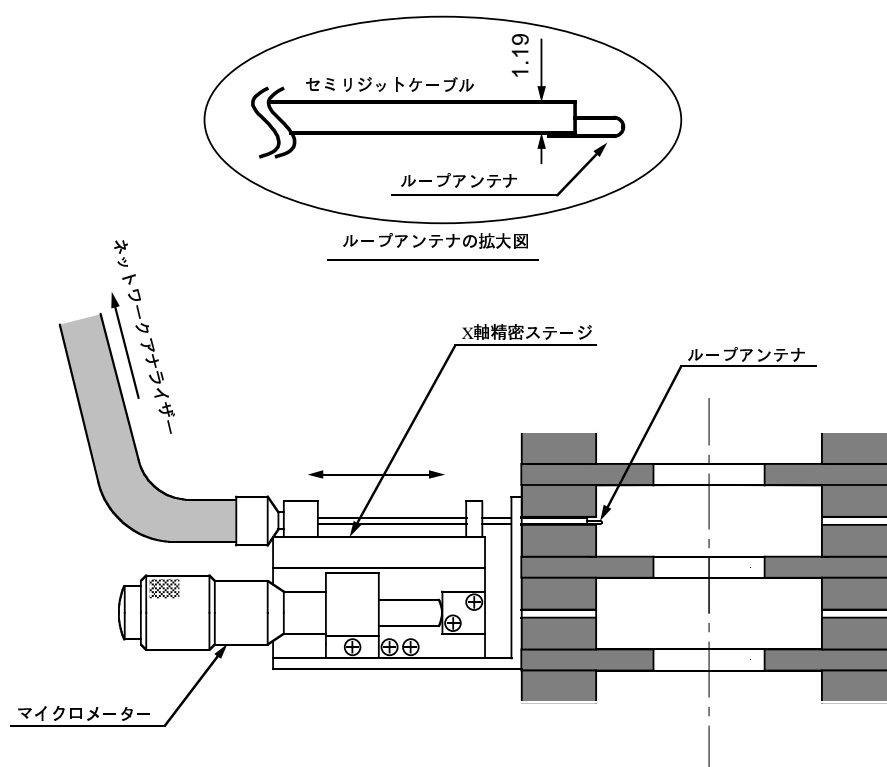


図 5.2: ループアンテナと移動機構

- 湿度計
加速管付近の湿度を 0.1% の分解能で測定する。
- 気圧計
加速管付近の大気圧を 0.1[torr] の分解能で測定する。
- リニアスケール
電磁場測定用のビーズを 1[μm] の分解能で測定する。
- パルスモーター
電磁場測定用のビーズを 1 パルスあたり 0.2[μm] 移動させる。

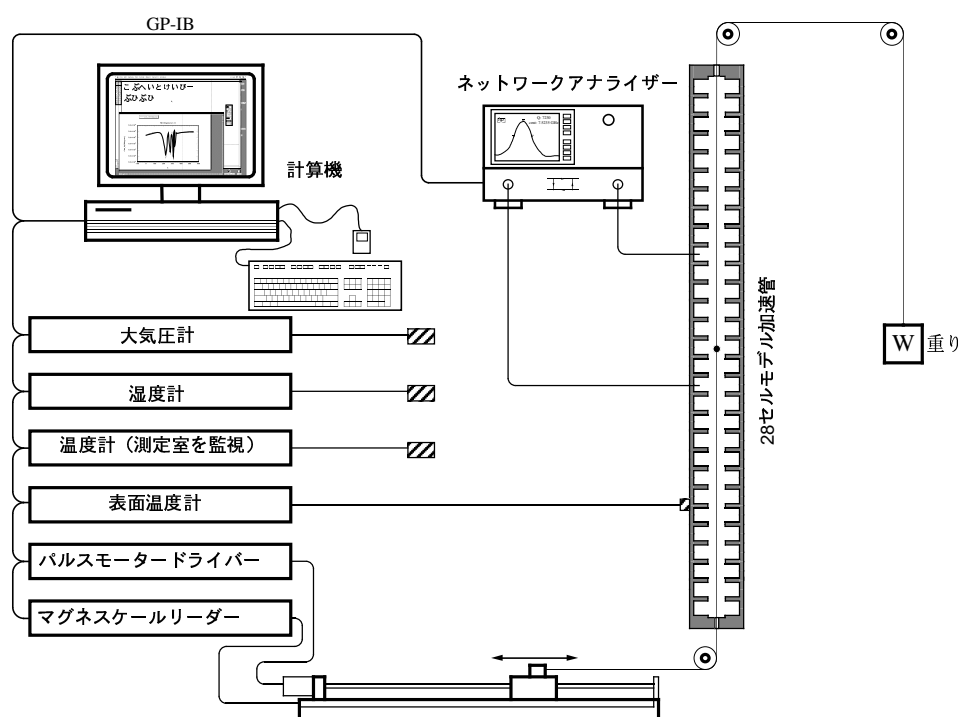


図 5.3: モデル加速管測定システム。電磁場分布は、図に示した加速管内のビーズによる周波数変化（または位相変化）を測定することにより求める。

5.2.3 周波数・電磁場の測定方法

周波数の測定方法

オープンモード展開の計算結果から、周波数が低くかつインピーダンスの高いモードの電磁場は、数個のセルに局在していることが分かっている。したがって、それらの周波数

を測定するためには、局在した位置にアンテナをセットする必要がある。そのために、モデル加速管ではセル毎にアンテナを導入するための穴が開いている。実際、周波数を測定するときは、第1セルから第28セルにわたってアンテナを移動させた。その場合、図5.2に示したマイクロメーターを注意深く動かし、アンテナの導入量を極力少なくし、周波数が収束することを確認しながら測定を行った。

電磁場の測定方法

オープンモード展開の計算では、キック因子は $r = a$ の位置の電場の z 方向成分 E_z を積分することにより求めていた。しかし、双極モードの $r = a$ の位置の電磁場は、電場 $\{E_r, E_\theta, E_z\}$ と磁場 $\{H_r, H_\theta, H_z\}$ の全ての成分がある。これらの中から、測定により特定の成分の分布を求めることは困難である。したがって、キック因子を $r = a$ の位置の E_z を測定し、それを積分することにより求めることは得策でない。しかし、双極モードのカップリングインピーダンスは、軸上の電場の横方向成分 \mathbf{E}_\perp と磁場の横方向成分 \mathbf{H}_\perp を測定することにより求めることができる [39]。

参考文献 [39] によれば、軸対称の空洞の中に軸対称の摂動物を同軸に入れた場合、その周波数の変化は、次式によって表すことができる。

$$\frac{\omega_a^2 - \omega^2}{\omega_a^2} = 4\pi r_0^3 [F_1 E_{az}^2 + F_2 E_{a\perp}^2 - \frac{1}{2} F_3 H_{az}^2 - \frac{1}{2} F_4 H_{a\perp}^2] \quad (5.1)$$

ここで、 ω_a と ω は、それぞれ摂動が無いときと摂動球を入れたときの共振周波数である。 $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ は摂動物の電磁場に対する寄与を表す形状因子である。 r_0 は摂動球または摂動ディスクの半径等である。 $\{E_{az}, E_{a\perp}\}$ と $\{H_{az}, H_{a\perp}\}$ は、摂動が無いときの Z 方向と横方向の電磁場である。それらの電磁場は、空洞内の体積分が1になるように規格化している。

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv = 1 \quad (5.2)$$

$$\int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv = 1 \quad (5.3)$$

軸対称構造における双極モードの場合、軸上での Z 方向の電磁場の成分はゼロである。また摂動球の場合、 $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 1$ であり、ディスクの場合は球とは異なる値（参考文献 [39] では、 $F_1 = 0.202$, $F_2 = 0.720$, $F_3 = 0.720$, $F_4 = 0.306$ ）である。したがって、球とディスクを用いてそれによる共振周波数の摂動量を各々測定すれば、軸上に電磁場の絶対値 $|E_{a\perp}|$ と $|H_{a\perp}|$ が計算できる。するとカップリングインピーダンスが分かり、キック因子を求めることができる。

5.3 測定結果

5.3.1 共振周波数

測定されたモデル加速管の双極モードの共振周波数とオープンモード展開により求められた共振周波数を図 5.4 に示す。これら 2 つの値の差は最大 0.43% のものを除くと $\pm 0.2\%$ で一致している。

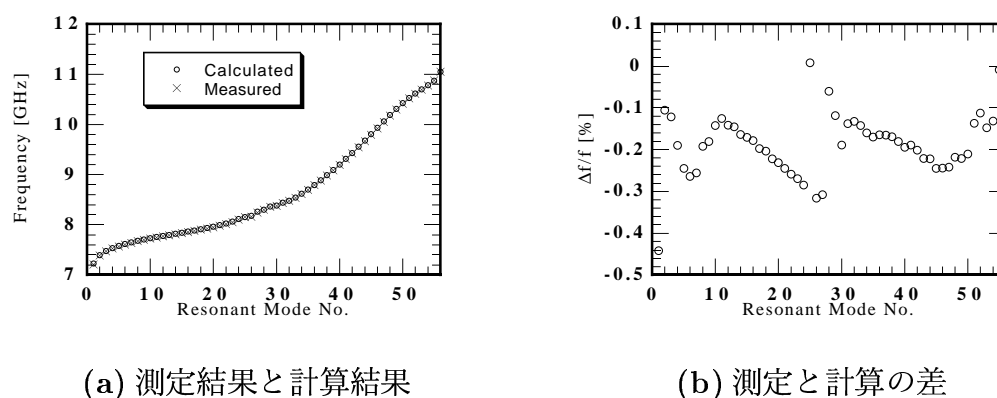


図 5.4: ダイポールモードの共振周波数の測定結果と計算結果

5.3.2 電磁場

4章で述べたように、周波数分散構造の場合、比較的大きなキック因子を持つモードの電磁場は、加速管の途中のセルにトラップされている。そのことを確認するために、ビーズ摂動法によりモデル加速管の測定を行った。このモデル加速管の場合、オープンモード展開の計算では最大のキック因子を持つのは 14 番目のモードであり、図 5.5 に示す成分の分布をしている。

直径 1.2[mm] の摂動球を軸上に沿って、モデル加速管の入口から出口まで 0.5[mm] 刻みで移動させて、その共振周波数を測定した。測定された共振周波数から、ビーズによる摂動が無いときの共振周波数を引いた値 δf を図 5.6 に示す。この摂動量を表す δf は、前小節から次式になる。

$$\delta f = \frac{\omega - \omega_a}{2\pi} \quad (5.4)$$

$$\delta f \cong -\frac{f_a}{2} \left\{ 4\pi r_0^3 \left[E_{a\perp}^2 - \frac{1}{2} H_{a\perp}^2 \right] \right\} \quad (5.5)$$

ここで、 f_a は摂動が無いときの共振周波数である。この式から、摂動球により、電場が存在する位置では周波数が下がり、磁場が存在する位置では周波数が上がることがわかる。測定結果の図 5.6 から、モデル加速管の軸上には主に電場が存在し、8 番目から 20 番目の加

速セルにわたって電磁場が存在していることがわかる。入口から数セルで周波数に摂動があるのは測定系のドリフトと推測している¹。

計算結果の図 5.5と測定結果の図 5.6を比較すると次のことがわかる。

- 測定・計算ともに 8～20 番目のセルに電磁場が存在することを示している。
- 摂動量 δf の負側のピークは、12,15,17,18,19 番目のセルにある。一方、オープンモード展開の計算結果は、11～12,13,15,17,18,19にピークを示している。このうち測定結果と異なるものは、13 番目のピークである。13 番目のセルの位置での摂動量 δf の測定結果を再び見ると、その場所に少し肩があり大きな負のピークの中に小さな正のピークが重なったように見える。

以上のことから、計算により示された電磁場のトラップされるセルについては、実験的にもトラップされることが確認された。またその分布も似ている。

5.4 まとめ

モデル加速管の双極モードの測定により、次のことがわかった。

- 共振周波数の測定値とオープンモード展開による計算値は、 $\pm 0.2\%$ で一致している。
- 電磁場の存在するセルの分布も、測定と計算は良い一致を示している。

これらのことから、オープンモード展開による周波数分散構造の解析は有効であると判断できる。

¹この測定には、4時間程度かかっている

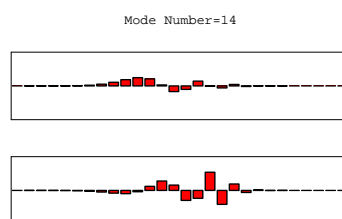


図 5.5: 14 番目の共振モードのオープンモードの成分。縦軸が成分であり全スケールは±1, 横軸は Cell No. である。計算では各セル 8 個のオープンモードを用いたが、3 日目以降のオープンモードの成分は低次の 2 つのモードに比べ非常に小さいので表示していない。下側の棒グラフは open1、上側は open2 をそれぞれ示す。

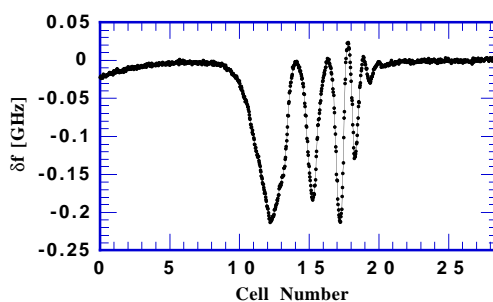


図 5.6: 軸上の直径 1.2[mm] の摂動球による 14 番目の双極モードの周波数変化

第 6 章

本研究のまとめ

6.1 本研究の成果

JLC に適用できる周波数分散構造の開発を目指し、リニアック加速管内の長距離ウェーク場の研究をオープンモード展開を用いて行った。このオープンモード展開は、U. C. Berkeley の R. M. Bevensee が 1960 年代に理論的説明を行い、2 個のオープンモードで周期構造の分散関係の解析を行いその有効性を示した。しかし、周期構造の解析にはメッシュを用いたコードの方が計算可能な形状に於いてはるかに汎用的であるため、オープンモード展開は加速管の解析にあまり使用されなかったと思われる。

筆者は、本研究でこのオープンモード展開を周波数分散構造の解析に用いることにした。周期構造をオープンモード展開で解析することから始めたが、展開するモードの数が多い場合や加速セルのディスク孔が大きい場合、R. M. Bevensee が示した方法をそのまま適用すると、無損失セルにもかかわらず周波数が複素数になる矛盾が生じることがわかった。オープンモード展開の理論は、加速セル内の電場を無限個の基底関数（オープンモード）で級数展開を行うように構築されているが、実際に数値計算を行う場合は有限個のオープンモードで展開する必要があるためにこの矛盾が生じたのである。この矛盾を取り除くために、オープンモード展開で解く固有値方程式の行列の性質を調べ、有限個の基底関数でもこの行列の性質を保存する方法を開発し、その有効性を示すことができた。これによって、周波数分散構造のように比較的ディスク孔の大きい加速管の高次のモードの解析にオープンモード展開を用いる見通しが立った。更に、筆者はこれを発展させることにより、本来周期構造を解析するために開発されたオープンモード展開を非周期構造にも適用できる式を導いた。

本研究では、こうして導かれた式を用いてリニアコライダーのための周波数分散構造のウェーク場の解析を行った。この解析は、これまでリニアコライダーの周波数分散構造の解析に大きな貢献をしてきた SLAC の K. L. F. Bane らが示した二重パスバンド等価回路モデルに代表される等価回路の解析を含み、更に高次モードまで取り入れて計算・解析できるところに特徴がある。本研究では、周期構造は 24 個のモードまで、周波数分散構造では 8 個のモードまで、取り入れて計算を行った。

以下に本研究の成果を本論文の各章ごとにまとめる。

- 2章 **周期構造の双極モードの評価**
フィールドマッチングを用いて、ディスク形状（厚さと穴径）を系統的に変化させ、単加速セルの双極モードの計算を行った。この結果から、ディスクの形状に依存する双極モードの振る舞いが分かり、周波数分散構造を設計するときの指針となる基礎的データを得ることができた。
- 3章 **周期構造のオープンモード展開**
有限個のオープンモードで加速セル内の電場を級数展開するオープンモード展開の限界、すなわちディスク孔が大きい場合や計算するモード数が多い場合に得られる周波数が複素数になることを示した。そして、この限界を打破する有効な方法、すなわち有限個のオープンモードで展開する場合でも固有値方程式の性質が無限個のときと同様にエルミート性を損なわない取り扱いを開発し、その有効性を示した。これにより、リニアコライダの周波数分散構造に用いる比較的ディスク孔の大きい加速セルの高次のモードがオープンモード展開を用いて計算できるようになった。
- 4章 **非周期構造のオープンモード展開**
周期構造を解析するオープンモード展開を非周期構造へ適用する方法を示し、その固有値方程式を導いた。これを用いて、JLCの周波数分散構造を8個のオープンモードで展開し、そのウェーク関数の計算を行い、JLCの周波数分散構造の出発点となる構造を決めることができた。また、 HEM_{16} モードのウェーク関数の減衰が困難であることがわかった。
- 5章 **周波数分散構造の双極モードの測定**
オープンモード展開の有効性を確認するために、周波数分散構造のモデルを製作し、その共振モードを測定した。その結果、共振周波数はオープンモード展開の計算と良い一致を示し、有効性を確認した。

6.2 今後の課題

本研究の主な成果は、オープンモード展開を周波数分散構造に適用する方法を示したところにある。そして、この方法を用いて周波数分散構造を計算したが、この計算した加速管は実機の形状とは異なる。実機の形状の計算は今後の課題として残る。また、このオープンモード展開の検証も今後の課題である。

1. オープンモード展開の方法の発展

本研究により計算された周波数分散構造は、円筒と円環から構成されている。しかし、実際の加速セルはディスクの先端が丸であるし、左右対称でない。本研究で用いられたオープンモード展開を更に発展させて、実機の形状の加速管を計算する必要がある。

2. 外部とのカップリングや壁損失の影響を取り入れた計算
リニアコライダーの実機では、これらの影響を無視することはできないであろう。また、周波数分散構造と減衰構造を組み合わせたものも考えられており、その場合は外部とのカップリングを十分な精度で計算する必要がある。
3. 低電力試験によるオープンモード展開の検証
本研究での低電力試験を更に進めて、オープンモード展開の検証を行う必要がある。特に電磁場を精度良く測定して、オープンモード展開との比較を行うべきである。
4. ウェークフィールドの測定
最終的な検証として、ウェークフィールドを直接測定して計算方法の評価を行う必要がある。

謝辞

本研究を行うにあたり、指導教官として研究を指導して頂いた高エネルギー物理学研究所・高田耕治加速器研究系総主幹に心より感謝いたします。特に、Bevensee のオープンモード展開の方法を示して頂いたことに感謝いたします。さらに、日頃からの研究の進行や論文作成に対して数々の助言、指導をして下さった同研究所・山崎良成加速器研究系主幹に心より感謝いたします。

本研究を進めるにあたり、終始御指導を頂いた高エネルギー物理学研究所・肥後寿泰助手に心より感謝いたします。また、同研究所・横谷馨教授、水野元助教授、新竹積助手、久保浄助手には貴重なご助言を頂きました。深く感謝いたします。また、同研究所・JLCグループや加速器研究部の方々には、大変お世話になりました。ここに感謝の意を表します。高エネルギー物理学研究所に在籍している総合研究大学院大学の方々には大変お世話になりました。心より感謝いたします。

東北大学（現所属 日本原子力研究所）の谷内努博士には、日頃から議論、協力して頂き感謝いたします。

また、本研究は企業に在籍したままで3年間大学院へ派遣されそこで自由な研究を行うことにより成されました。このような機会を与えて下さった石川島播磨重工業株式会社の方々に深く感謝いたします。

最後に、研究生活の支援と論文の校正に対して、妻圭子に感謝の意を記します。

付録 A

ウェーク場の基本的理論

本付録は、参考文献 [12] を基に書いている。ただし、参考文献 [12] では、電磁場 $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ を用いて記述しているが、本付録ではベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャル $\{\mathbf{A}, \phi\}$ を用いて記述するものとする。

A.1 ウェークポテンシャルの定義

図 A.1 のように、空間的に一様な構造物の途中にその一様性を乱す構造物があるようなものを考える。ただし、計算を簡単にするために、これらの構造は完全導体と仮定する。加速器の場合、このような構造物は両端にビームパイプの付いた加速空洞の場合とほぼ等価である。

このような構造の中では、荷電粒子が加速空洞を通り過ぎた場合、加速空洞付近にはウェーク場が発生する。図 A.1 のような場合、最初に電荷量 q_1 の先行電荷により加速空洞付近にウェーク場が発生する。その後、先行電荷の後方 s の位置にある電荷（これを試験電荷と言う）が加速空洞を通り過ぎると先行電荷が発生させたウェーク場の作用により、その運動量 P は変化する。試験電荷の電荷量を q_2 とした場合、その運動量の変化 ΔP は、ウェークポテンシャル $\mathbf{W}(\mathbf{r}_\perp, s)$ を用いて書き表すと次式のようなになる。

$$\Delta P = q_1 q_2 \mathbf{W}(\mathbf{r}_\perp, s) \quad (\text{A.1})$$

式 (A.1) から、ウェークポテンシャルは、試験電荷が感じるローレンツ力を $q_1 q_2$ で割ったものの積分として計算できることがわかる。すなわち、ウェークポテンシャルは次式のように電磁場の積分として表現できる。当然、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t)$ 磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r}_\perp, z, t)$ とともに位置と時刻の関数である。先行電荷の時刻と位置との関係を $z = ct$ とすると、試験電荷のそれらの関係は $z = ct - s$ となる。これらのことを用いるとウェークポテンシャルは、次式のように計算できる。

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}_\perp, s) = \frac{1}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz [\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t) + c \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_\perp, z, t)]_{t=(z+s)/c} \quad (\text{A.2})$$

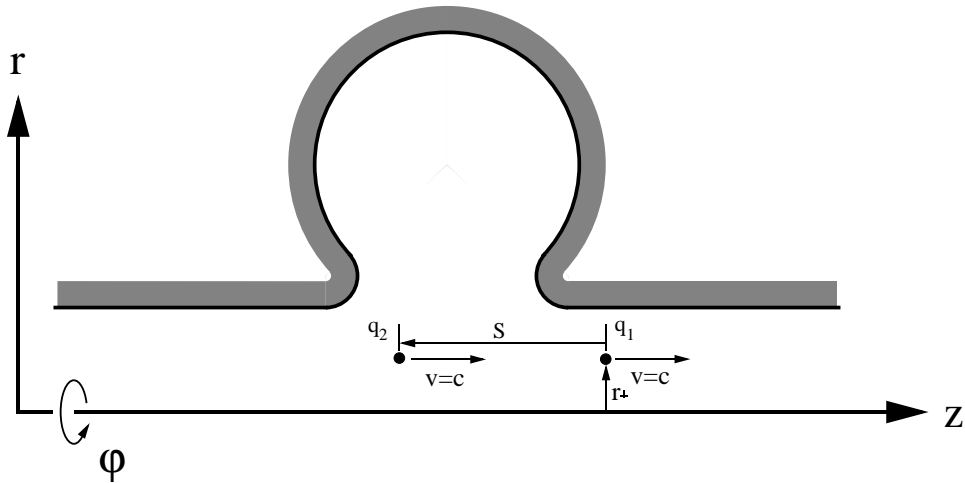


図 A.1: 先行電荷と試験電荷の位置関係。電荷量 q_1 のバンチから後方 s の位置に電荷量 q_2 の試験電荷がある。電荷は両方とも光速で z 方向に運動をしている。また、それらの横方向座標 (r, ϕ) は等しい。

A.2 縦ウェークポテンシャルと横ウェークポテンシャルの関係

式 (A.2) から、ウェークポテンシャルは次式のように縦ウェークポテンシャル $W_z(\mathbf{r}_\perp, s)$ と横ウェークポテンシャル $W_\perp(\mathbf{r}_\perp, s)$ に分離できる。

$$W_z(\mathbf{r}_\perp, s) = \frac{1}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz [E_z(\mathbf{r}_\perp, z, t)]_{t=(z+s)/c} \quad (\text{A.3})$$

$$W_\perp(\mathbf{r}_\perp, s) = \frac{1}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz [\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}_\perp, z, t) + (c\hat{z} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_\perp, z, t))_\perp]_{t=(z+s)/c} \quad (\text{A.4})$$

横ウェークポテンシャルの表式は、縦ウェークポテンシャルの表式に比べ複雑である。しかし、縦ウェークポテンシャルから横ウェークポテンシャルを導くことは原理的に可能なので、この複雑な方の式を計算する必要はない。

横ウェークポテンシャルをベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp, z, t)$ とスカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{r}_\perp, z, t)$ で書き直すと、次式のようになる。

$$\begin{aligned} W_\perp(\mathbf{r}_\perp, s) &= \frac{1}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[-\nabla\phi(\mathbf{r}_\perp, z, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp, z, t)}{\partial t} + c\hat{z} \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp, z, t) \right]_{\perp t=(z+s)/c} \\ &= -\frac{1}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\perp, z, t) - \nabla_\perp (cA_z(\mathbf{r}_\perp, z, t)) + \nabla_\perp\phi(\mathbf{r}_\perp, z, t) \right]_{t=(z+s)/c} \\ &= -\frac{1}{q_1} \left[\mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\perp, z, (z+s)/c) \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{c}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[\nabla_\perp \left(A_z(\mathbf{r}_\perp, z, t) + \frac{\phi(\mathbf{r}_\perp, z, t)}{c} \right) \right]_{t=(z+s)/c} \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

ここで、ビームパイプの両端での境界条件を次のように設定すると、式 (A.5) の右辺第 1 項は、 $\left[\mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\perp, z, (z+s)/c) \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$ となる。

- 両端での境界面の法線が Z 方向である。
- 境界が電氣的短絡面（境界での電場の向きが面の法線方向と一致している）である。

このような境界条件をビームパイプの両端の遠い場所に設定することは、通常の加速器のウェーク場を計算する場合、十分良い近似である。

つぎに、式 (A.5) の右辺第 1 項をゼロとした場合の横ウェークポテンシャルの s に関する偏導関数を求める。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{W}_\perp(\mathbf{r}_\perp, s)}{\partial s} &= -\frac{c}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz \nabla_\perp \left[\frac{\partial t}{\partial s} \frac{\partial A_z(\mathbf{r}_\perp, z, t)}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial t}{\partial s} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}_\perp, z, t)}{\partial t} \right]_{t=(z+s)/c} \\
 &= -\frac{1}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz \nabla_\perp \left[\frac{\partial A_z(\mathbf{r}_\perp, z, t)}{\partial t} + \frac{\partial \phi(\mathbf{r}_\perp, z, t)}{\partial z} \right]_{t=(z+s)/c} \\
 &= -\nabla_\perp \frac{1}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz [E_z(\mathbf{r}_\perp, z, t)]_{t=(z+s)/c} \\
 &= -\nabla_\perp W_z(\mathbf{r}_\perp, s)
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

式 (A.6) が縦ウェークポテンシャルと横ウェークポテンシャルの関係を示す。また、完全導体で囲まれた空洞でその中に電荷が無い場合については、参考文献 [40] に示されており、Panofsky-Wenzel 理論と呼ばれている。

式 (A.6) から、横ウェークポテンシャルは縦ウェークポテンシャルの積分の勾配として次式のように計算できる。

$$\mathbf{W}_\perp(\mathbf{r}_\perp, s) = -\nabla_\perp \int_{-\infty}^s ds' W_z(\mathbf{r}_\perp, s') \tag{A.7}$$

A.3 縦ウェークポテンシャルの性質

縦ウェークポテンシャルは、横方向に関して次式のようにラプラス方程式を満たすことはよく知られている。

$$\nabla_\perp^2 W_z(\mathbf{r}_\perp, s) = 0 \tag{A.8}$$

このことを示すために、まず初めに縦ウェークポテンシャルに横方向ラプラス演算子を作用させる。そして、電場 $E_z(\mathbf{r}_\perp, z, t)$ をベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを用いて書き表すと、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \nabla_\perp^2 W_z(\mathbf{r}_\perp, s) &= \nabla_\perp^2 \frac{1}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz [E_z(\mathbf{r}_\perp, z, t)]_{t=(z+s)/c} \\
 &= \frac{1}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[\nabla_\perp^2 \left(-\frac{\partial A_z(\mathbf{r}_\perp, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial \phi(\mathbf{r}_\perp, z, t)}{\partial z} \right) \right]_{t=(z+s)/c}
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

よく知られているようにマックスウェルの方程式は、ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルで書き表すことができる。マックスウェルの方程式に従うベクトルポテンシャル $A_z(\mathbf{r}_\perp, z, t)$ とスカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{r}_\perp, z, t)$ は、ローレンツゲージを用いた場合、次式のように書くことができる。

$$\left(\nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) A_z(\mathbf{r}_\perp, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z(\mathbf{r}_\perp, z, t)}{\partial t^2} = -\mu_0 J_z(\mathbf{r}_\perp, z, t) \quad (\text{A.10})$$

$$\left(\nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \phi(\mathbf{r}_\perp, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r}_\perp, z, t)}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\mathbf{r}_\perp, z, t)}{\varepsilon_0} \quad (\text{A.11})$$

ここで、 $J_z(\mathbf{r}_\perp, z, t)$ と $\rho(\mathbf{r}_\perp, z, t)$ は、それぞれ先行バンチの密度と電荷密度を示している。式 (A.10), (A.11) のように表現されたマックスウェルの方程式を式 (A.9) に代入すると、次式が得られる。

$$\nabla_\perp^2 W_z(\mathbf{r}_\perp, s) = \frac{1}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \mu_0 \left(\frac{\partial J_z}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right]_{t=(z+s)/c} \quad (\text{A.12})$$

ここで連続の式を用いると、式 (A.12) 右辺の積分の中の第2項は、 $\frac{\partial J_z}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$ となる。また、式 (A.12) 右辺の積分の中の第1項の中のベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの表式は、電場 E_z で書き表すことができる。これらのことから、式 (A.12) は次式のように書き直すことができる。

$$\nabla_\perp^2 W_z(\mathbf{r}_\perp, s) = \frac{1}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_z(\mathbf{r}_\perp, z, t) \right]_{t=(z+s)/c} \quad (\text{A.13})$$

通常の方法で式 (A.13) を計算することは困難であるため、フーリエ変換を利用して計算を進める。座標空間 (\mathbf{r}_\perp, z) と時間空間 (t) で記述されている電場 $E_z(\mathbf{r}_\perp, z, t)$ は、フーリエ変換を用いることにより、 z 座標を波数空間 (k_z) で、時間空間を周波数空間 (ω) で記述された電場 $\tilde{E}_z(\mathbf{r}_\perp, k_z, \omega)$ で書き表すことができる。

$$E_z(\mathbf{r}_\perp, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tilde{E}_z(\mathbf{r}_\perp, k_z, \omega) e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (\text{A.14})$$

この式 (A.14) を式 (A.13) に代入して計算を進めると、関係式 $\nabla_\perp^2 W_z(\mathbf{r}_\perp, s) = 0$ を得ることができる。

$$\begin{aligned} \nabla_\perp^2 W_z(\mathbf{r}_\perp, s) &= \frac{1}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{i(\omega t - k_z z)} \tilde{E}_z(\mathbf{r}_\perp, k_z, \omega) \Big|_{t=(z+s)/c} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{i\left(\frac{\omega}{c} - k_z\right)z} e^{i\frac{\omega}{c}s} \tilde{E}_z(\mathbf{r}_\perp, k_z, \omega) \\ &= \frac{1}{2\pi q_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \delta\left(k_z - \frac{\omega}{c}\right) e^{i\frac{\omega}{c}s} \tilde{E}_z(\mathbf{r}_\perp, k_z, \omega) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

付録 B

ベクトル波動方程式

本論文で扱っている問題は、加速管内のベクトル波動方程式を解くことに他ならない。従って、この方程式の性質を明らかにしてから議論を進めるべきである。解である関数の直交性の性質について、本付録で述べる。

電氣的短絡面や磁氣的短絡面で囲まれた共振空洞内の電磁場は、純実数（または、純虚数）で表すことができ、それらは互いに直交していることは良く知られている。一方、周期境界条件の場合についてはあまり知られていない。この場合でも電磁場は直交していることを本付録で示す。

B.1 直交性

ある有限な領域 V で定義されベクトル関数 $\psi(\mathbf{r})$ 系が、次に示されるベクトル波動方程式を満足する場合、その解が直交する条件について考察する。当然これは、電荷のない共振空洞内の電磁場が満たすべき方程式である。

$$\nabla \times (\nabla \times \psi) - k^2 \psi = 0 \quad (\text{B.1})$$

この微分方程式の解である関数系を k^2 の小さい順に並べた場合の n 番目および m 番目の解をそれぞれ ψ_n, ψ_m とする。これらの解は、次式を満たすことは明らかである。ただし、右肩添字のアスタリスク $*$ は複素共役を表す。

$$\psi_n^* \cdot \nabla \times (\nabla \times \psi_m) - k_m^2 \psi_n^* \cdot \psi_m = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\psi_m \cdot \nabla \times (\nabla \times \psi_n^*) - k_n^2 \psi_m \cdot \psi_n^* = 0 \quad (\text{B.3})$$

これらの式を辺ごとに引き算をして、定義されている領域 V で積分を行い、そして整理すると式 (B.4) のようになる。

$$\begin{aligned} (k_m^2 - k_n^2) \int_V \psi_m \cdot \psi_n^* dv &= \int_V [\psi_n^* \cdot \nabla \times (\nabla \times \psi_m) - \psi_m \cdot \nabla \times (\nabla \times \psi_n^*)] dv \\ &= \int_s [\psi_m \times (\nabla \times \psi_n^*) - \psi_n^* \times (\nabla \times \psi_m)] \cdot \mathbf{n} ds \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

これらの関数系が直交する条件の考察を行う。しかし、全て漏れなくその条件を探すことは数学的厳密さが要求され困難が予想されるので、共振空洞の電磁場を記述するときに必要な条件に限ることとする。式 (B.4) の右辺の境界上での積分がゼロであること及び縮退のないことは、この関数系が直交する十分条件になる。この条件

$$\int_s [\boldsymbol{\psi}_m \times (\nabla \times \boldsymbol{\psi}_n^*) - \boldsymbol{\psi}_n^* \times (\nabla \times \boldsymbol{\psi}_m)] \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (\text{B.5})$$

を満たす境界条件として以下の3通りの場合が考えられる。

- **ノイマンの条件**

次式のように、ベクトル関数値が境界と垂直な場合。これはよく知られているように、 $\boldsymbol{\psi}$ が電場を表すとき電氣的短絡面の境界条件になる。

$$\boldsymbol{\psi} \times \mathbf{n} = 0 \quad (\text{B.6})$$

- **ディリクレの条件**

次式のように、ベクトル関数値の回転が境界と垂直な場合。これはよく知られているように、 $\boldsymbol{\psi}$ が電場を表すとき磁氣的短絡面の境界条件になる。

$$(\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \times \mathbf{n} = 0 \quad (\text{B.7})$$

- **周期境界条件**

図 B.1 のように2つの全く同じ形状をした境界で、その境界の法線の方向が反対の場合について考える。そして境界 α と β でのベクトル関数値が次の関係を満たしている場合も、直交関数系となる。

$$\boldsymbol{\psi}(\alpha) = e^{i\phi} \boldsymbol{\psi}(\beta) \quad (\text{B.8})$$

このことは、次のようにして示すことができる。境界の領域 s のうち α および β 以外の領域は、ノイマンまたはディリクレの条件を満足するものと仮定する。そうすると、式 (B.4) の右辺の積分は、次式のように、領域 α, β 積分のみとなる。

式 (B.4) の右辺

$$\begin{aligned} &= \int_{\alpha} [\boldsymbol{\psi}_m(\alpha) \times \nabla \times \boldsymbol{\psi}_n^*(\alpha) - \boldsymbol{\psi}_n^*(\alpha) \times \nabla \times \boldsymbol{\psi}_m(\alpha)] \cdot \mathbf{n}(\alpha) ds \\ &\quad + \int_{\beta} [\boldsymbol{\psi}_m(\beta) \times \nabla \times \boldsymbol{\psi}_n^*(\beta) - \boldsymbol{\psi}_n^*(\beta) \times \nabla \times \boldsymbol{\psi}_m(\beta)] \cdot \mathbf{n}(\beta) ds \\ &= \int_{\alpha} [\boldsymbol{\psi}_m(\alpha) \times \nabla \times \boldsymbol{\psi}_n^*(\alpha) - \boldsymbol{\psi}_n^*(\alpha) \times \nabla \times \boldsymbol{\psi}_m(\alpha)] \cdot \mathbf{n}(\alpha) ds \\ &\quad + \int_{\alpha} [e^{-i\phi} \boldsymbol{\psi}_m(\alpha) \times \nabla \times e^{i\phi} \boldsymbol{\psi}_n^*(\alpha) - e^{i\phi} \boldsymbol{\psi}_n^*(\alpha) \times \nabla \times e^{-i\phi} \boldsymbol{\psi}_m(\alpha)] \cdot [-\mathbf{n}(\alpha)] ds \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

従って、縮退がなくセル間位相差 ϕ の周期境界条件を持つ関数系は直交系を形成していることがわかる。

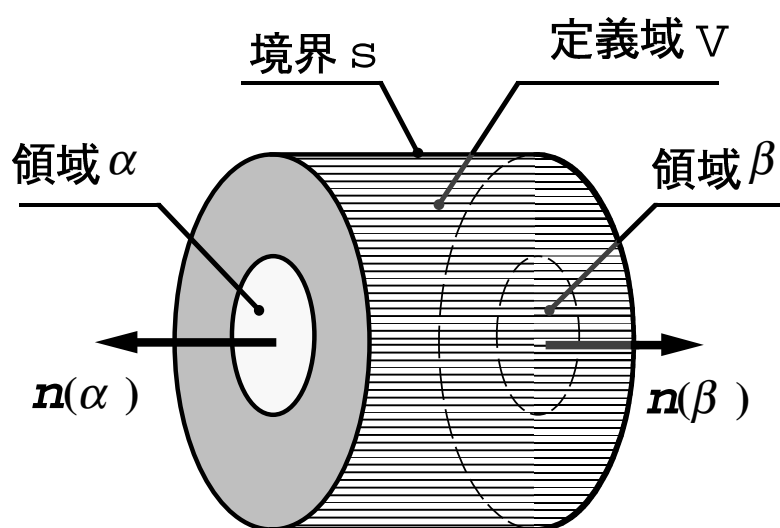


図 B.1: 関数の定義域とその境界。関数の定義域 V の境界 s の一部分に領域 α および β がある。この2つの領域は対称な関係にある。

付録 C

フィールド マッチング

フィールドマッチングでは、加速セルの電磁場を任意の領域に分割し、境界での電磁場の連続性を保証することを条件に、各々の領域の電磁場を直交関数で展開する。本論文では、加速セルを図 C.1に示すように加速セルを円筒と円環の部分に分割して計算を行った。

このコードを用いて2章の加速セルの解析や3章での周期構造のオープンモード展開の検証を行った。また、3章や4章で重要となってくる、オープンモードと他のモードとのディスク孔部での面積分や加速セル内での内積の計算などにも用いた。

本論文のフィールドマッチングのコードは、参考文献 [34] に沿って作成した。本付録では、本論文で用いたフィールドマッチングについて説明を行う。C.1節から C.3節までは、先に示した参考文献と内容は同じである。

C.1 軸対称構造の波動方程式

空洞内の電磁場の満たす方程式は、ベクトル波動方程式である。

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{C.2})$$

この場合、ベクトルラプラシアンは、 $\nabla^2 = \text{grad div} - \text{rot rot}$ である。直角座標の場合のみベクトルラプラシアンはスカラーラプラシアンと等しくなり、円筒座標の場合は z 方向の成分のみ等しくなり、容易に計算ができる。したがって、円筒空洞の電磁場を計算する場合、電場または磁場の z 方向成分を計算して（スカラーラプラシアンと同じ微分方程式であるから計算は容易）、残りの成分はマックスウェルの方程式に従い計算する。しかし、このような方法で横方向の電磁場が計算できるのは TE または TM モードの場合のみなので、加速空洞の場合はこの方法は困難である。そこで、ポテンシャルを導入して、電磁場を全てそのポテンシャルの微分で表すことにする。ソースから遠い場合、ベクトル・スカラーポテンシャルよりもヘルツベクトルの方が計算が容易である。ヘルツベクトルでは、円筒領域の電磁場を2個の量で記述する。

空洞内ではヘルツベクトルも、電磁場同様ベクトル波動方程式を満たさなくてはならない。円柱座標系でこの方程式を記述すると、ヘルツベクトルの z 方向成分はスカラーラプラス方程式を満たすため、通常の変数分離を用いて解くことができる。電気的および磁氣的ヘルツベクトルの z 方向成分を、それぞれ $\pi_z, \tilde{\pi}_z$ とすると

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] \begin{Bmatrix} \pi_z \\ \tilde{\pi}_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{C.3})$$

となる。ここで、

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (\text{C.4})$$

である。

C.2 加速セルのフィールドマッチング

C.2.1 加速セル内の形状

フィールドマッチングで計算する加速セルの形状を図 C.1 に示す。この加速セルを円筒領域 (I) と円環領域 (II) に分割し、それぞれの領域を直交関数で展開する。境界で電磁場の連続性を保証することにより、展開の係数を決める。

図に示すように、計算するセルの中心を $z = 0$ とし、セル長は $2\pi R$ 、ディスクの半径は b 、加速セルの半径は d 、円環部分の z 方向の長さは $2g$ とする。この加速セルを境界条件としてセル間位相差 ϕ とし計算を行う。これは、完全周期構造内の電磁場がセル当たりの位相差 ϕ で進行している場合に相当する。

C.2.2 加速セル内のヘルツベクトル

式 (C.3) を解くためにヘルツベクトルを、次式のように変数分離を行って計算する。

$$\begin{Bmatrix} \pi_z \\ \tilde{\pi}_z \end{Bmatrix} = R(r) \cdot Z(z) \cdot \Theta(\theta) \quad (\text{C.5})$$

すると、 θ 方向に関して、次式の微分方程式が成り立つ。

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + m^2 \Theta = 0 \quad (\text{C.6})$$

ヘルツベクトルが 1 価関数であるためには、 m は整数でなくてはならない。そして、 π_z が $\cos(m\theta)$ の依存性となれば、 $\tilde{\pi}_z$ が $\sin(m\theta)$ の依存性を持つ。

また、 z 方向に関しては、次式の微分方程式が成り立つ。

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \beta^2 Z = 0 \quad (\text{C.7})$$

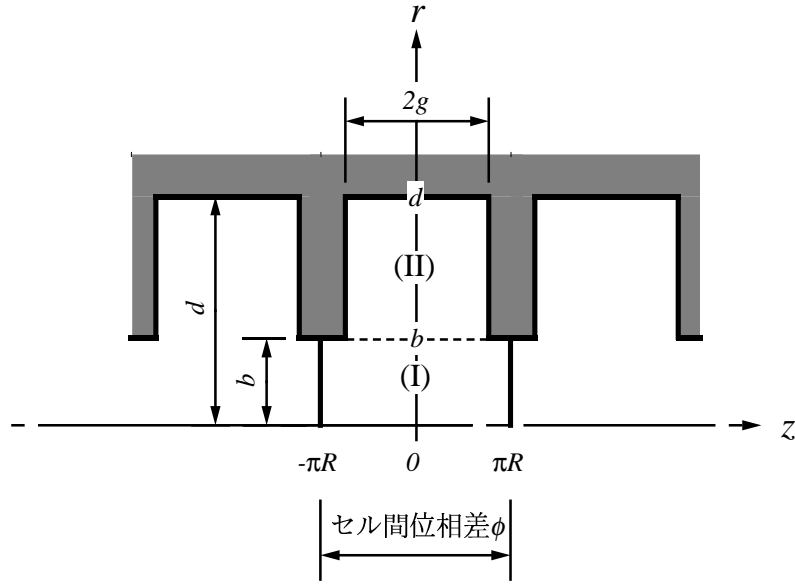


図 C.1: フィールドマッチングの計算形状。軸対称の加速セルを領域 (I) は円筒、領域 (II) は円環で表現している。

加えて、領域 (I) では周期構造であるために次式のプロケの定理が成り立つ。

$$Z(z + 2\pi R) = e^{-2\pi R\beta_0 i} Z(z) \quad (\text{C.8})$$

ただし、

$$\beta_0 = \frac{\phi}{2\pi R} \quad (\text{C.9})$$

である。関数 $Z(z)$ は、このプロケの定理と先の微分方程式を満足する次式のような級数で展開できる。

$$Z(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^I e^{-i\beta_n z} \quad (\text{C.10})$$

$$\beta_n = \beta_0 + \frac{n}{R} \quad (\text{C.11})$$

一方、円環の領域 (II) では、 z 方向には完全導体という境界条件があるため

$$Z(z) = \begin{cases} \sum_{s=0}^{\infty} a_s^{II} \cos[\alpha_s(z + g)], & \text{for } \pi_z \\ \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{a}_s^{II} \sin[\alpha_s(z + g)], & \text{for } \tilde{\pi}_z \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

となる。ただし、

$$\alpha_s = \frac{\pi s}{2g} \quad (\text{C.13})$$

である。

最後に r 方向については、

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \left(\chi_n^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (\text{C.14})$$

が成り立つ。ここで、

$$\chi_n^2 = \beta_n^2 - k^2 \quad (\text{C.15})$$

である。この微分方程式の解は変形されたベッセル関数である。領域 (I) の原点 ($r = 0$) でこの関数が有限であるためには、第 1 種の変形されたベッセル関数 $I_m(z)$ に限る。したがって、領域 (I) では、

$$R(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^I I_m(\chi_n r) \quad (\text{C.16})$$

となる。

一方、円環の領域 (II) では、 $r = d$ に完全導体があるその境界条件を満足する必要がある。加えて、この領域には原点 ($r = 0$) を含まないので、第 1 種の変形されたベッセル関数 $I_m(z)$ も第 2 種の変形されたベッセル関数 $K_m(z)$ も解となりうる。これらを満足する関数は、次に示すものである。

$$\begin{aligned} R_m(\Gamma_s r) &= K_m(\Gamma_s d) I_m(\Gamma_s r) - I_m(\Gamma_s d) K_m(\Gamma_s r) & \text{for } \pi_z \\ S_m(\Gamma_s r) &= K'_m(\Gamma_s d) I_m(\Gamma_s r) - I'_m(\Gamma_s d) K_m(\Gamma_s r) & \text{for } \tilde{\pi}_z \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

ただし、

$$\Gamma_s^2 = \alpha_s^2 - k^2 \quad (\text{C.18})$$

である。ここで、 $R_m(\Gamma_s d) = S'_m(\Gamma_s d) = 0$ である。領域 (II) の場合、 $R(r)$ はこれらの関数 R_m, S_m で展開できる。

これまでの結果をまとめると領域 (I) でのヘルツベクトルは、

$$\pi_z^I = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n I_m(\chi_n r)}{\chi_n^2 I_m(\chi_n b)} e^{-i\beta_n z} \cos(m\theta) \quad (\text{C.19})$$

$$\tilde{\pi}_z^I = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{B_n I_m(\chi_n r)}{\chi_n^2 I_m(\chi_n b)} e^{-i\beta_n z} \sin(m\theta) \quad (\text{C.20})$$

と書き表すことができる。これらの式の分母の定数 $\chi_n^2 I_m(\chi_n b)$ は後の計算の便利のために付けている。

同様に領域 (II) でのヘルツベクトルは、

$$\pi_z^{II} = - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\bar{C}_s R_m(\Gamma_s r)}{\Gamma_s^2 R_m(\Gamma_s b)} \cos\{\alpha_s(z+g)\} \cos(m\theta) \quad (\text{C.21})$$

$$\tilde{\pi}_z^{II} = i \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{D}_s S_m(\Gamma_s r)}{\Gamma_s^2 S_m(\Gamma_s b)} \sin\{\alpha_s(z+g)\} \sin(m\theta) \quad (\text{C.22})$$

と書き表すことができる。領域 (I) の場合と同様に定数で割っている。

C.2.3 加速セル内の電磁場

ヘルツベクトルから電磁場 \mathbf{E} , \mathbf{H} は、次式のように書き表すことができる。

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \pi - \nabla \times \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial t} \quad (\text{C.23})$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \nabla \times \tilde{\pi} + \nabla \times \frac{1}{c} \frac{\partial \pi}{\partial t} \quad (\text{C.24})$$

また、電磁場の時間依存性は $e^{i\omega t}$ である。これらのことから、電磁場のそれぞれの成分はヘルツベクトルを用いて次式のように書き表すことができる。

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\partial^2 \pi_z}{\partial r \partial z} - \frac{ik}{r} \frac{\partial \tilde{\pi}_z}{\partial \theta} & Z_0 H_r &= \frac{\partial^2 \tilde{\pi}_z}{\partial r \partial z} + \frac{ik}{r} \frac{\partial \pi_z}{\partial \theta} \\ E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \pi_z}{\partial \theta \partial z} + ik \frac{\partial \tilde{\pi}_z}{\partial r} & Z_0 H_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{\pi}_z}{\partial \theta \partial z} - ik \frac{\partial \pi_z}{\partial r} \\ E_z &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \pi_z & Z_0 H_z &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \tilde{\pi}_z \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

ここで、 Z_0 は通常真空中のインピーダンスと呼ばれる量である。しかし、本論文で用いた計算機コードでは、 $Z_0 = 1$ とし、電磁場はそれぞれ

$$\int_V |\mathbf{E}|^2 dv = 1 \quad (\text{C.26})$$

$$\int_V |\mathbf{H}|^2 dv = 1 \quad (\text{C.27})$$

と規格化している。

このフィールドマッチングの電場と磁場には、以下の関係式が成り立っている。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -ik\mathbf{H} \quad (\text{C.28})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = ik\mathbf{E} \quad (\text{C.29})$$

C.2.4 フィールドマッチング

領域 (I) と (II) の境界 $r = b$ では、電磁場の連続性から次式が成り立たなくてはならない。

$$E_{z,\theta}^I = \begin{cases} E_{z,\theta}^{II} & |z| \leq g \\ 0 & g \leq |z| \leq \pi r \end{cases} \quad (\text{C.30})$$

$$H_{z,\theta}^I = H_{z,\theta}^{II} \quad |z| \leq g \quad (\text{C.31})$$

式 (C.19), (C.20), (C.21), (C.22) を式 (C.25) に代入し、それを式 (C.30), 式 (C.31) に代入し、整理すると電磁場の連続性は次式により表すことができる。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-i\beta_n z} = \begin{cases} \sum_{s=0}^{\infty} \bar{C}_s \cos\{\alpha_s(z+g)\} & |z| \leq g \\ 0 & g \leq |z| \leq \pi r \end{cases} \quad (\text{C.32})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (P_n A_n + I_n B_n) e^{-i\beta_n z} = \begin{cases} -i \sum_{s=0}^{\infty} (Q_s \bar{C}_s + S_s \bar{D}_s) \sin\{\alpha_s(z+g)\} & |z| \leq g \\ 0 & g \leq |z| \leq \pi r \end{cases} \quad (\text{C.33})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{-i\beta_n z} = -i \sum_{s=0}^{\infty} \bar{D}_s \sin\{\alpha_s(z+g)\} \quad |z| \leq g \quad (\text{C.34})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (I_n A_n + P_n B_n) e^{-i\beta_n z} = -i \sum_{s=0}^{\infty} (\bar{R}_s \bar{C}_s + Q_s \bar{D}_s) \cos\{\alpha_s(z+g)\} \quad |z| \leq g \quad (\text{C.35})$$

ここで、

$$P_n = \frac{m\beta_n}{\chi_n^2 b}, \quad I_n = \frac{k}{\chi_n} \frac{I'_m}{I_m} \Big|_{\chi_n b} \quad (\text{C.36})$$

$$Q_s = \frac{m\alpha_s}{\Gamma_s^2 b}, \quad \bar{R}_s = \frac{k}{\Gamma_s} \frac{R'_m}{R_m} \Big|_{\Gamma_s b}, \quad S_s = \frac{k}{\Gamma_s} \frac{S'_m}{S_m} \Big|_{\Gamma_s b} \quad (\text{C.37})$$

である。

ここで、関数 $e^{-i\beta_n z}$ は円筒領域 (I) の $[-\pi R, \pi R]$ で、また関数 $\sin\{\alpha_s(z+g)\}$ や $\cos\{\alpha_s(z+g)\}$ は円環領域 (II) の $[-g, g]$ で直交関数系を形成している。したがって、

$$A_n = \mu \sum_{s=0}^{\infty} \bar{N}_{ns} \bar{C}_s \quad (\text{C.38})$$

$$P_n A_n + I_n B_n = \mu \sum_{s=0}^{\infty} \bar{M}_{ns} (Q_s \bar{C}_s + S_s \bar{D}_s) \quad (\text{C.39})$$

$$\bar{D}_s = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{M}_{sn}^\dagger B_n \quad (\text{C.40})$$

$$(1 + \delta_{s0}) \bar{R}_s \bar{C}_s + Q_s \bar{D}_s = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{N}_{sn}^\dagger (I_n A_n + P_n B_n) \quad (\text{C.41})$$

$$(\text{C.42})$$

である。ただし、

$$\mu = \frac{g}{\pi R} \quad (\text{C.43})$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{N}_{ns} \\ \bar{M}_{ns} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2g} \int_{-g}^g e^{i\beta_n z} \begin{Bmatrix} \cos\{\alpha_s(z+g)\} \\ -i \sin\{\alpha_s(z+g)\} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{C.44})$$

$$= \frac{1}{g} \begin{Bmatrix} \beta_n \\ \alpha_s \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\beta_n g) & \text{s even} \\ i \cos(\beta_n g) & \text{s odd} \end{bmatrix} \quad (\text{C.45})$$

である。ただし、行列 \bar{M}^\dagger と \bar{N}^\dagger は、それぞれ行列 \bar{M} と \bar{N} の随伴行列である。

先に示した式を全て純実数にするために、次式を定義する。

$$C_s, D_s = \begin{cases} \bar{C}_s, \bar{D}_s & s \text{ even} \\ i\bar{C}_s, i\bar{D}_s & s \text{ odd} \end{cases} \quad (\text{C.46})$$

$$M_{ns}, N_{ns} = \begin{cases} \bar{M}_{ns}, \bar{N}_{ns} & s \text{ even} \\ i\bar{M}_{ns}, i\bar{N}_{ns} & s \text{ odd} \end{cases} \quad (\text{C.47})$$

加えて、

$$R_s = (1 + \delta_{s0})\bar{R}_s \quad (\text{C.48})$$

とする。すると、解くべき式は全て次式のように純実数となる。

$$A_n = \mu \sum_{s=0}^{\infty} N_{ns} C_s \quad (\text{C.49})$$

$$P_n A_n + I_n B_n = \mu \sum_{s=0}^{\infty} M_{ns} (Q_s C_s + S_s D_s) \quad (\text{C.50})$$

$$D_s = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_{sn}^T B_n \quad (\text{C.51})$$

$$R_s C_s + Q_s D_s = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_{sn} (I_n A_n + P_n B_n) \quad (\text{C.52})$$

C.2.5 行列表示

式 (C.50) から式 (C.52) を行列を用いて表現すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Q & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \quad (\text{C.53})$$

$$\begin{pmatrix} R & Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} N^T & 0 \\ 0 & M^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (\text{C.54})$$

となる。そして、これらの2つの式をまとめると、

$$\left\{ \begin{pmatrix} G_1 & G_{12} \\ G_{12} & G_2 \end{pmatrix} - 2\mu \begin{pmatrix} N^T & 0 \\ 0 & M^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & H_{12} \\ H_{12} & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} C' \\ D' \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.55})$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} G_1 &= Q^2 S^{-1} - R & H_1 &= P^2 I^{-1} - I \\ G_{12} &= Q S^{-1} & H_{12} &= P I^{-1} \\ G_2 &= S^{-1} & H_2 &= I^{-1} \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

である。そして、

$$C' = -C \quad D' = QC + SD \quad (\text{C.57})$$

である。

周波数は、

$$\det \left[G - 2\mu \begin{pmatrix} N^T H_1 N & N^T H_{12} M \\ M^T H_{12} N & M^T H_2 M \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (\text{C.58})$$

から求めることができる。

C.3 蓄積エネルギー

加速セル内の蓄積エネルギー (Stored Energy) U は、

$$U = \frac{\varepsilon}{2} \int E \cdot E^* dV \quad (\text{C.59})$$

$$= U^I + U^{II} \quad (\text{C.60})$$

である。領域 (I) と (II) の蓄積エネルギー U^I と U^{II} は、次式のようにになる。この計算方法は、参考文献 [34] の APPENDIX A を参照のこと。

$$U^I = \frac{\pi^2 R \varepsilon b^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[|A_n|^2 \left(\frac{\beta_n^2}{\chi_n^2} K_{2n} + K_{1n} \right) + |B_n|^2 \frac{k^2}{\chi_n^2} K_{2n} + \frac{4A_n B_n m \beta_n k}{\chi_n^4 b^2} \right] \quad (\text{C.61})$$

$$U^{II} = \frac{\pi \varepsilon g b^2}{4} \sum_{s=0}^{\infty} \left[(1 + \delta_{s0}) |C_s|^2 \left(\frac{\alpha_s^2}{\Gamma_s^2} L_{2s} + L_{1s} \right) \right. \\ \left. + (1 + \delta_{s0}) |D_s|^2 \frac{k^2}{\Gamma_s^2} L_{3s} - \frac{4C_s D_s m \alpha_s k}{\Gamma_s^4 b^2} \right] \quad (\text{C.62})$$

ここで、

$$K_{1n} = \frac{2}{I_m^2(x)} \int_0^1 I_m^2(xr) r dr \Big|_{x=\chi_n b} \\ = \left[\left(1 + \frac{m^2}{x^2} \right) - \frac{I_m^2(x)}{I_m^2(x)} \right] \Big|_{x=\chi_n b} \quad (\text{C.63})$$

$$K_{2n} = \frac{2}{I_m^2(x)} \int_0^1 \left[I_m^2(xr) + \frac{m^2}{x^2 r^2} I_m^2(xr) \right] r dr \Big|_{x=\chi_n b} \\ = \left[\frac{2I_m'(x)}{x I_m(x)} - K_{1n} \right] \Big|_{x=\chi_n b} \quad (\text{C.64})$$

$$L_{1s} = \frac{2}{R_m^2(x)} \int_1^{d/b} R_m^2(xr) r dr \Big|_{x=\Gamma_s b} \\ = \left[- \left(1 + \frac{m^2}{x^2} \right) + \frac{R_m^2(x)}{R_m^2(x)} - \frac{1}{x^2 R_m^2(x)} \right] \Big|_{x=\Gamma_s b} \quad (\text{C.65})$$

$$L_{2s} = \frac{2}{R_m^2(x)} \int_1^{d/b} \left[R_m^2(xr) + \frac{m^2}{x^2 r^2} R_m^2(xr) \right] r dr \Big|_{x=\Gamma_s b}$$

$$= \left[-\frac{2R'_m(x)}{xR_m(x)} - L_{1s} \right] \Big|_{x=\Gamma_s b} \quad (\text{C.66})$$

$$L_{3s} = \frac{2}{S_m^2(x)} \int_1^{d/b} \left[S_m'^2(xr) + \frac{m^2}{x^2 r^2} S_m^2(xr) \right] r dr \Big|_{x=\Gamma_s b}$$

$$= \left[-\frac{2S'_m(x)}{xS_m(x)} + \left(1 + \frac{m^2}{x^2}\right) - \frac{S_m'^2(x)}{S_m^2(x)} - \frac{1}{x^2 S_m^2(x)} \left(1 + \frac{m^2}{x^2(d/b)^2}\right) \right] \Big|_{x=\Gamma_s b} \quad (\text{C.67})$$

$$(\text{C.68})$$

である。

C.4 キック因子

加速セルのキック因子は、1章の式 (1.11) から式 (1.21) により次式の積分から計算できる。

$$\tilde{k}_{\parallel}(\pm) = \frac{|V(\pm)|^2}{4Ua^{2m}} \quad (\text{C.69})$$

$$\tilde{k}_{\perp}(\pm) = \frac{cm|V(\pm)|^2}{4Ua^{2m}\omega} \quad (\text{C.70})$$

ここで電圧 $V(\pm)$ は、次式のようにディスク孔 ($r = b$) の場所での電場の z 方向の積分で定義されている。

$$V(\pm) = \int E_z(z, r = b) e^{\pm ikz} dz \quad (\text{C.71})$$

この電圧は、領域 (II) の ($r = b$) の電場を積分して求める。式 (C.21) を式 (C.25) に代入することにより、電場の z 方向成分 E_z^{II} は、

$$E_z^{II} = \sum_{s=0}^{\infty} \bar{C}_s \frac{R_m(\Gamma_s r)}{R_m(\Gamma_s b)} \cos\{\alpha_s(z + g)\} \cos(m\theta) \quad (\text{C.72})$$

になる。 $\theta = 0$, $r = b$ の電場 E_z^{II} を $[-g, g]$ の区間で積分することにより、次式のように電圧が計算できる。

$$V(\pm) = \int_{-g}^g \sum_{s=0}^{\infty} \bar{C}_s \cos\{\alpha_s(z + g)\} e^{\pm ikz} dz$$

$$= -i \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{\mp igk} \{-k + e^{\pm 2igk} k \cos(2\alpha_s g) - i\alpha e^{\pm 2igk} \sin(\pi s)\}}{k^2 - \alpha_s^2} \bar{C}_s \quad (\text{C.73})$$

ここで

$$\begin{aligned} \cos(\pi s) &= 1 & \sin(\pi s) &= 0 & C_s &= \bar{C}_s & \text{for } s \text{ even} \\ \cos(\pi s) &= -1 & \sin(\pi s) &= 0 & C_s &= i\bar{C}_s & \text{for } s \text{ odd} \end{aligned} \quad (\text{C.74})$$

である。したがって、電圧は

$$V(\pm) = \sum_{s=0}^{even} C_s \frac{2k \sin(gk)}{k^2 - \alpha_s^2} \pm \sum_{s=1}^{odd} C_s \frac{2k \cos(gk)}{k^2 - \alpha_s^2} \quad (C.75)$$

である。以上により電圧が求められたのでキック因子が計算できる。

C.5 電場の体積分

前節までの結果を用いると、加速セル内の電磁場を計算することができる。さらにこの節では、モード間の内積を表す式を求める。モード i とモード j の内積 v_{ij} は次式のように定義される。

$$\begin{aligned} v_{ij} &= \int \mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{E}_j dv \\ &= v_{ij}^I + v_{ij}^{II} \end{aligned} \quad (C.76)$$

計算は、参考文献 [34] の APPENDIX A と同様の方法で行った。結果のみを以下に示す。領域 (I) での体積分 v_{ij}^I は、次式のようになる。

$$v_{ij}^I = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (v_{1kl} + v_{zkl} + v_{3kl} + v_{13kl} + v_{31kl}) \quad (C.77)$$

$$v_{1kl} = \pi b^2 \frac{\sin(\beta_{ik} - \beta_{jl}) \pi R}{(\beta_{ik} - \beta_{jl})} A_{ik} A_{ij} \frac{\beta_{ik} \beta_{jl}}{\chi_{ik}^2} K_{2kl} \quad (C.78)$$

$$v_{zkl} = \pi b^2 \frac{\sin(\beta_{ik} - \beta_{jl}) \pi R}{(\beta_{ik} - \beta_{jl})} A_{ik} A_{ij} K_{1kl} \quad (C.79)$$

$$v_{3kl} = \pi b^2 \frac{\sin(\beta_{ik} - \beta_{jl}) \pi R}{(\beta_{ik} - \beta_{jl})} B_{ik} B_{ij} \frac{k_{ik} k_{jl}}{\chi_{ik}^2} K_{2kl} \quad (C.80)$$

$$v_{13kl} = \pi b^2 \frac{\sin(\beta_{ik} - \beta_{jl}) \pi R}{(\beta_{ik} - \beta_{jl})} A_{ik} B_{ij} \frac{2m \beta_{ik} k_{jl}}{\chi_{ik}^2 \chi_{jl}^2 b^2} \quad (C.81)$$

$$v_{31kl} = \pi b^2 \frac{\sin(\beta_{ik} - \beta_{jl}) \pi R}{(\beta_{ik} - \beta_{jl})} A_{jl} B_{ik} \frac{2m \beta_{jl} k_{ik}}{\chi_{ik}^2 \chi_{jl}^2 b^2} \quad (C.82)$$

$$K_{1kl} = \frac{2}{X^2 - Y^2} \left\{ Y \frac{I_{m-1}^*(Y)}{I_m^*(Y)} - X \frac{I_{m-1}^*(X)}{I_m^*(X)} \right\} \Bigg|_{\substack{X=x_{ik}b \\ Y=x_{jl}b}} \quad (C.83)$$

$$= \frac{2}{X^2 - Y^2} \left\{ X \frac{I'_m(X)}{I_m^*(X)} - X \frac{I'_m(X)}{I_m^*(X)} \right\} \Bigg|_{\substack{X=x_{ik}b \\ Y=x_{jl}b}} \quad (C.84)$$

$$K_{2kl} = \left\{ \frac{2I_m^*(Y)}{Y I_m^*(Y)} - K_{1kl} \right\} \Bigg|_{\substack{X=x_{ik}b \\ Y=x_{jl}b}} \quad (C.85)$$

一方、領域 (II) での体積分 v_{ij}^{II} は次式のようにになる。

$$v_{ij}^{II} = \sum_{s=0}^{\infty} (v_{1kl} + v_{zkl} + v_{3kl} + v_{13kl} + v_{31kl}) \quad (\text{C.86})$$

$$v_{11ss} = \frac{\pi gb^2}{2} (1 + \delta_{0s}) C_{is} C_{js}^* \frac{\alpha_{is} \alpha_{js}}{\Gamma_{ks}^2} L_{2ss} \quad (\text{C.87})$$

$$v_{zzss} = \frac{\pi gb^2}{2} (1 + \delta_{0s}) C_{is} C_{js}^* L_{1ss} \quad (\text{C.88})$$

$$v_{33ss} = \frac{\pi gb^2}{2} (1 - \delta_{0s}) \bar{D}_{is} \bar{D}_{js}^* \frac{k_{is} k_{js}}{\Gamma_{ks}^2} L_{3ss} \quad (\text{C.89})$$

$$v_{13ss} = -\frac{\pi gb^2}{2} C_{is} \bar{D}_{js}^* \frac{2m \alpha_{is} k_{js}}{\Gamma_{is}^2 \Gamma_{js}^{*2} b^2} \quad (\text{C.90})$$

$$v_{31ss} = -\frac{\pi gb^2}{2} D_{is} \bar{C}_{js}^* \frac{2m k_{is} \alpha_{js}}{\Gamma_{is}^2 \Gamma_{js}^{*2} b^2} \quad (\text{C.91})$$

$$(\text{C.92})$$

$$L_{1ss} = \frac{2}{X^2 - Y^2} \left\{ X \frac{R'_m(X)}{R_m(X)} - Y^* \frac{R'_m(Y)}{R_m(Y)} \right\} \Bigg|_{\substack{X=\Gamma_{is}^b \\ Y=\Gamma_{js}^b}} \quad (\text{C.93})$$

$$L_{2ss} = -\frac{2}{Y^*} Y \frac{R'_m(Y)}{R_m(Y)} - L_{1ss} \Bigg|_{Y=\chi_{jl}^b} \quad (\text{C.94})$$

$$L_{3ss} = -\frac{2}{Y^*} Y \frac{S'_m(Y)}{S_m(Y)} - \frac{2}{X^2 - Y^{*2}} \left\{ X \frac{S'_m(X)}{S_m(X)} - Y^* \frac{S'_m(Y)}{S_m(Y)} \right\} \Bigg|_{\substack{X=\chi_{ik}^b \\ Y=\chi_{jl}^b}} \quad (\text{C.95})$$

C.6 ディスク境界面での電場と磁場のベクトル積

3章の式 (3.39) では、次式のセルの右側のディスク境界面での、 i 番目のショートモードの磁場と j 番目のオープンモードの電場とのベクトル積の面積分を計算する必要がある。

$$m_{ij} = \int \mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{C.96})$$

ここで、それぞれオープンモードとショートモードはフィールドマッチングのコードで計算される電磁場で次式のように置き換えることができる。

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{E}_j \quad (\text{C.97})$$

$$\mathbf{h}_i^* = -i\mathbf{H}_i \quad (\text{C.98})$$

したがって、

$$m_{ij} = -i \int_R \mathbf{E}_j \times \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{n} ds \quad (\text{C.99})$$

である。結果のみを以下に示す。

$$m_{ij} = -i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (m_{1kl} + m_{3kl} + m_{13kl} + m_{32kl}) \quad (\text{C.100})$$

ここで、これらの量は

$$m_{1kl} = -\pi m \beta_{jk} \beta_{il} \frac{A_{jk} B_{il}}{\chi_{jk}^2 \chi_{il}^2} e^{-i(\beta_{jk} + \beta_{il})\pi R} \quad (\text{C.101})$$

$$m_{3kl} = -\pi m k_j k_i \frac{A_{il} B_{jk}}{\chi_{jk}^2 \chi_{il}^2} e^{-i(\beta_{jk} + \beta_{il})\pi R} \quad (\text{C.102})$$

$$m_{13kl} = -\pi b^2 \beta_{jk} k_i \frac{A_{il} A_{jk}}{\chi_{jk}^2} e^{-i(\beta_{jk} + \beta_{il})\pi R} \frac{K_{2kl}}{2} \quad (\text{C.103})$$

$$m_{31kl} = -\pi b^2 k_j \beta_{il} \frac{B_{il} B_{jk}}{\chi_{jk}^2} e^{-i(\beta_{jk} + \beta_{il})\pi R} \frac{K_{2kl}}{2} \quad (\text{C.104})$$

$$(\text{C.105})$$

である。

付録 D

双極モードの電磁場の分布

付録 C に示したフィールドマッチングを用いて、双極モードのセル間位相差 $\phi = 0$ と π の電磁場分布の計算を行った。ここでの計算形状は、2 章で JLC の周波数分散構造の典型的なセルである。その形状を表 D.1 に示す。

表 D.1: 典型的な加速セルの寸法

項目	寸法 [mm]
ディスク厚 t	2.0
ディスク孔 a	4.5
セル内径 b	10.779
セル長 D	8.7474

フィールドマッチングにより計算される電磁場は複素数である。その場合、セル内の実際の電場 $E(\mathbf{r}, t)$ は、次式のように複素電場の実数部分として書き表すことができる。

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, t) &= \Re[E(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \\ &= \Re[E(\mathbf{r})] \cos(\omega t) + \Im[E(\mathbf{r})] \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

ここで、 $E(\mathbf{r})$ はフィールドマッチングで計算される複素電場である。同様に磁場は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}, t) &= \Re[H(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \\ &= \Re[H(\mathbf{r})] \cos(\omega t) + \Im[H(\mathbf{r})] \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

ここで、 $H(\mathbf{r})$ はフィールドマッチングで計算される複素磁場である。本付録で計算した双極モードの電磁場は、セル間位相差が $\phi = 0$ と π であるため定在波になる。この場合、電磁場および磁場の一方が純実数となり他方が純虚数となる。また、電磁場は表 D.2 に示すような特性を持っている。ただし、ショート/オープンモードとは、両端のディスク孔部で

の境界条件が電気/磁氣的短絡面の場合を言う。また、対称/反対称モードとは、加速セルの z 方向の中心を境界として磁場の横方向成分が対称/反対称の場合を言う。更に、電場は対称/反対称モードが純実数/純虚数である。これは、付録 C の A, B, C, D ベクトルを全て純実数としたためである [式 (C.55) の固有ベクトルを純実数にした]。

表 D.2: 0 と π モードの電磁場の特性

	0モード		π モード	
	ショートモード	オープンモード	ショートモード	オープンモード
対称性 (磁場)	対称モード	反対称モード	反対称モード	対称モード
電場	純実数	純虚数	純虚数	純実数
磁場	純虚数	純実数	純実数	純虚数

次ページ以降に電磁場分布の計算結果を示す。セル内の電磁場を示しているグラフの外枠の上部に書かれている数字は、左端のものは HEM_{1n} の n の値である。また、上部中心に書かれている F は周波数 [GHz] を示し、上部右の Real/Imag と E/H はそれぞれ実数部分/虚数部分と電場/磁場を表している。外枠の左側と下側の数字は、単位 [mm] で寸法を表している。

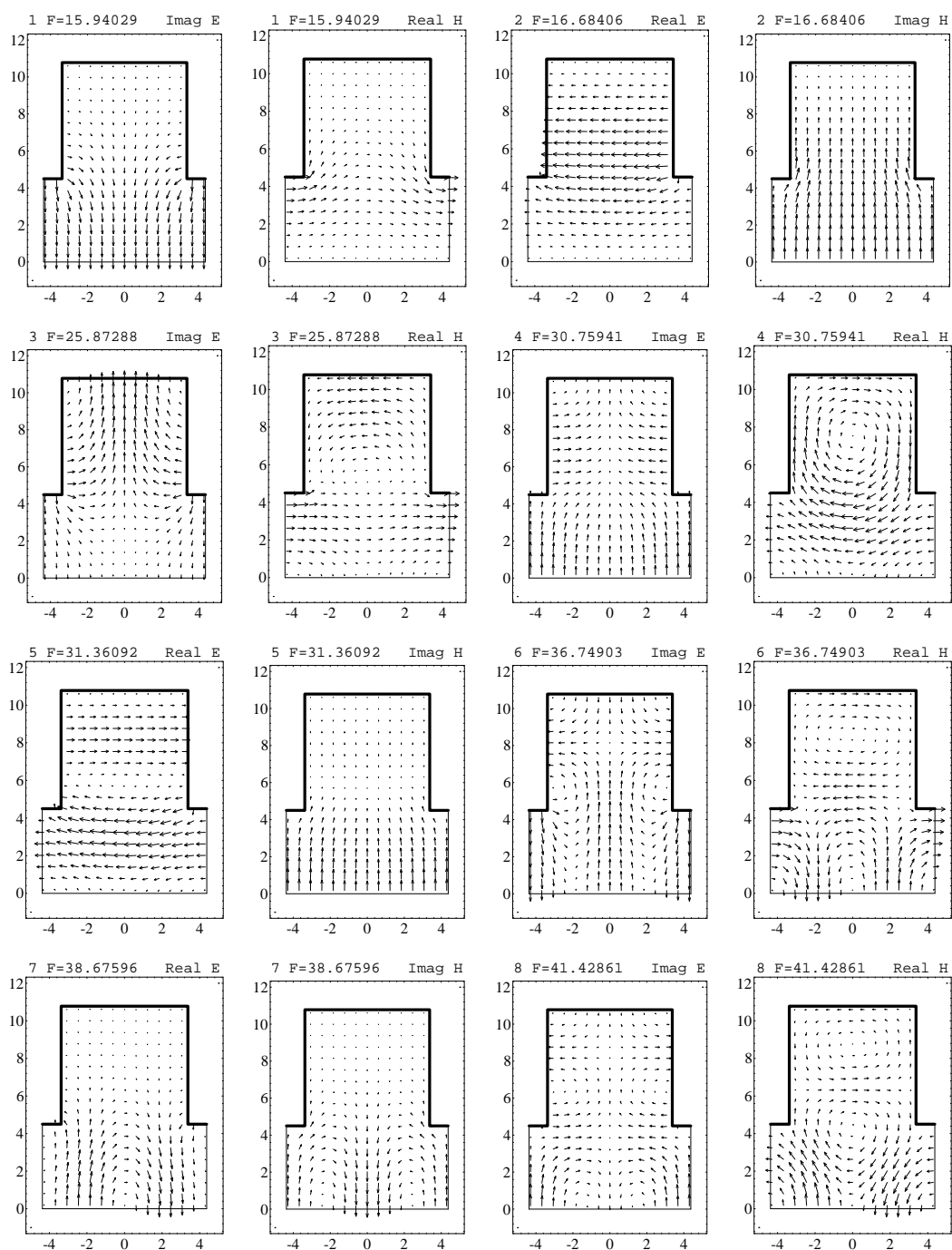


図 D.1: ディスク厚 $t=2.0$ [mm]、ディスク孔 $a=4.5$ [mm]、セル当たりの位相差 $\phi = 0$ [rad.] のときの1～8番目のモードのフィールドパターン。

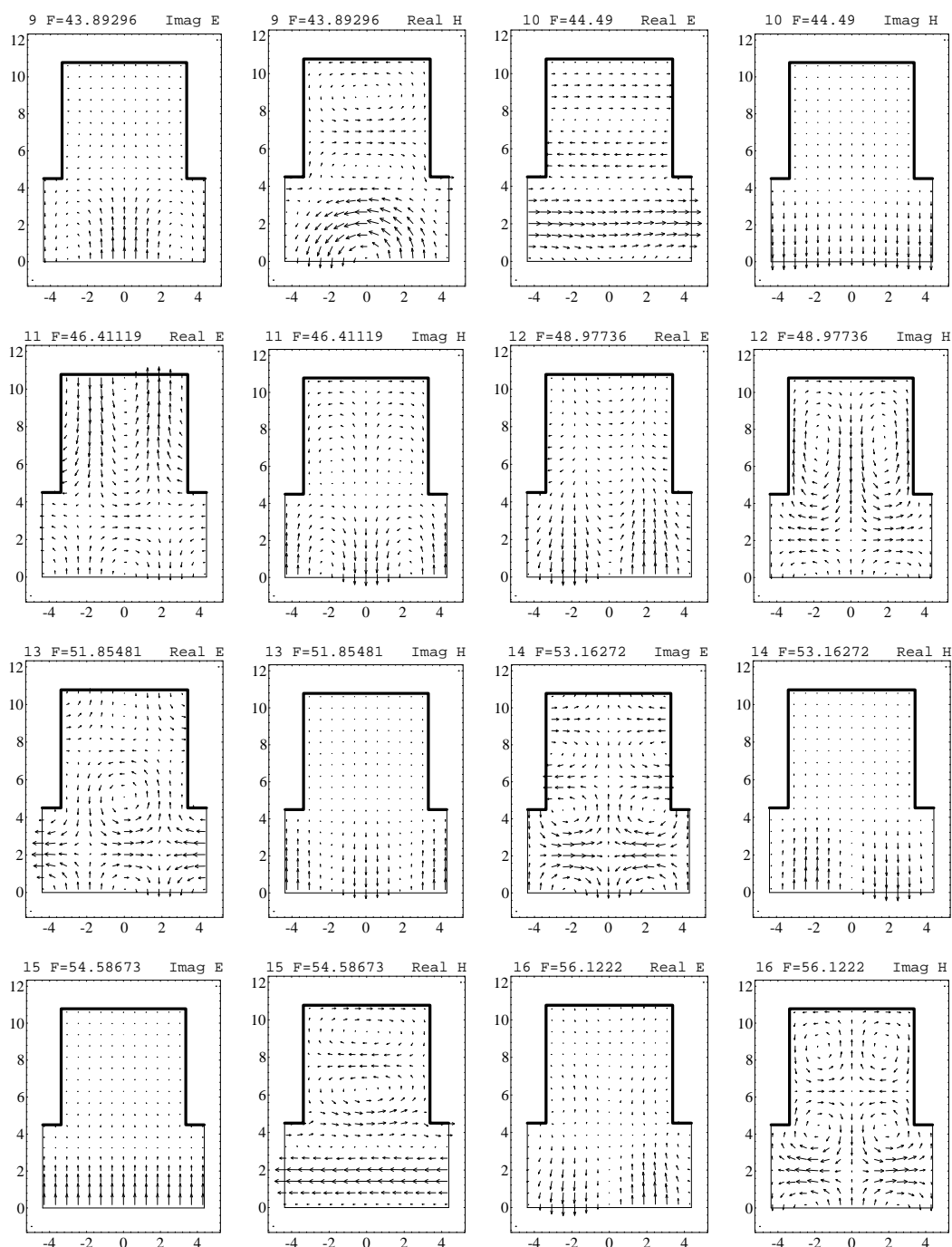


図 D.2: ディスク厚 $t=2.0$ [mm]、ディスク孔 $a=4.5$ [mm]、セル当たりの位相差 $\phi = 0$ [rad.] のときの 9~16 番目のフィールドパターン。

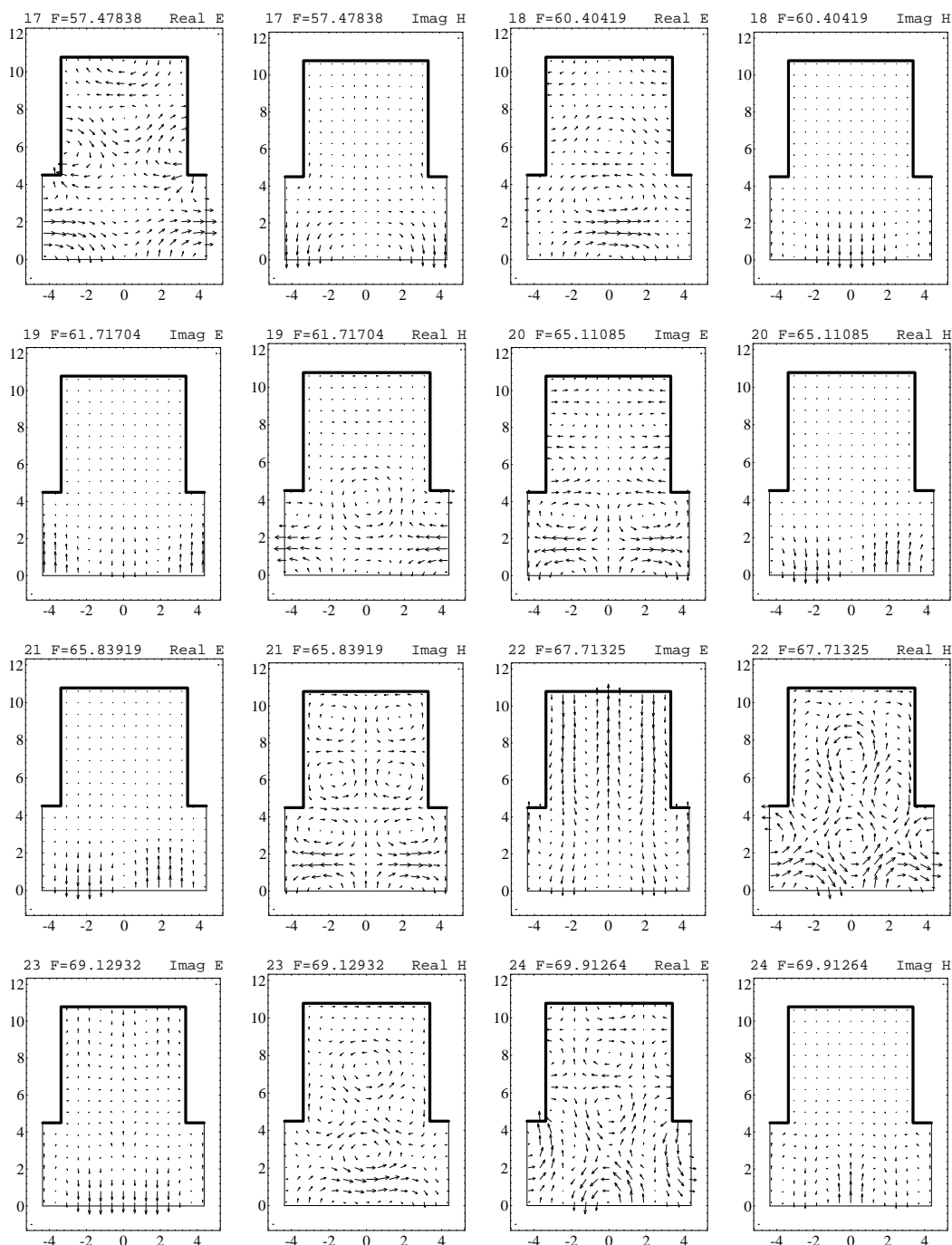


図 D.3: ディスク厚 $t=2.0$ [mm]、ディスク孔 $a=4.5$ [mm]、セル当たりの位相差 $\phi = 0$ [rad.] のときの 17~24 番目のモードのフィールドパターン。

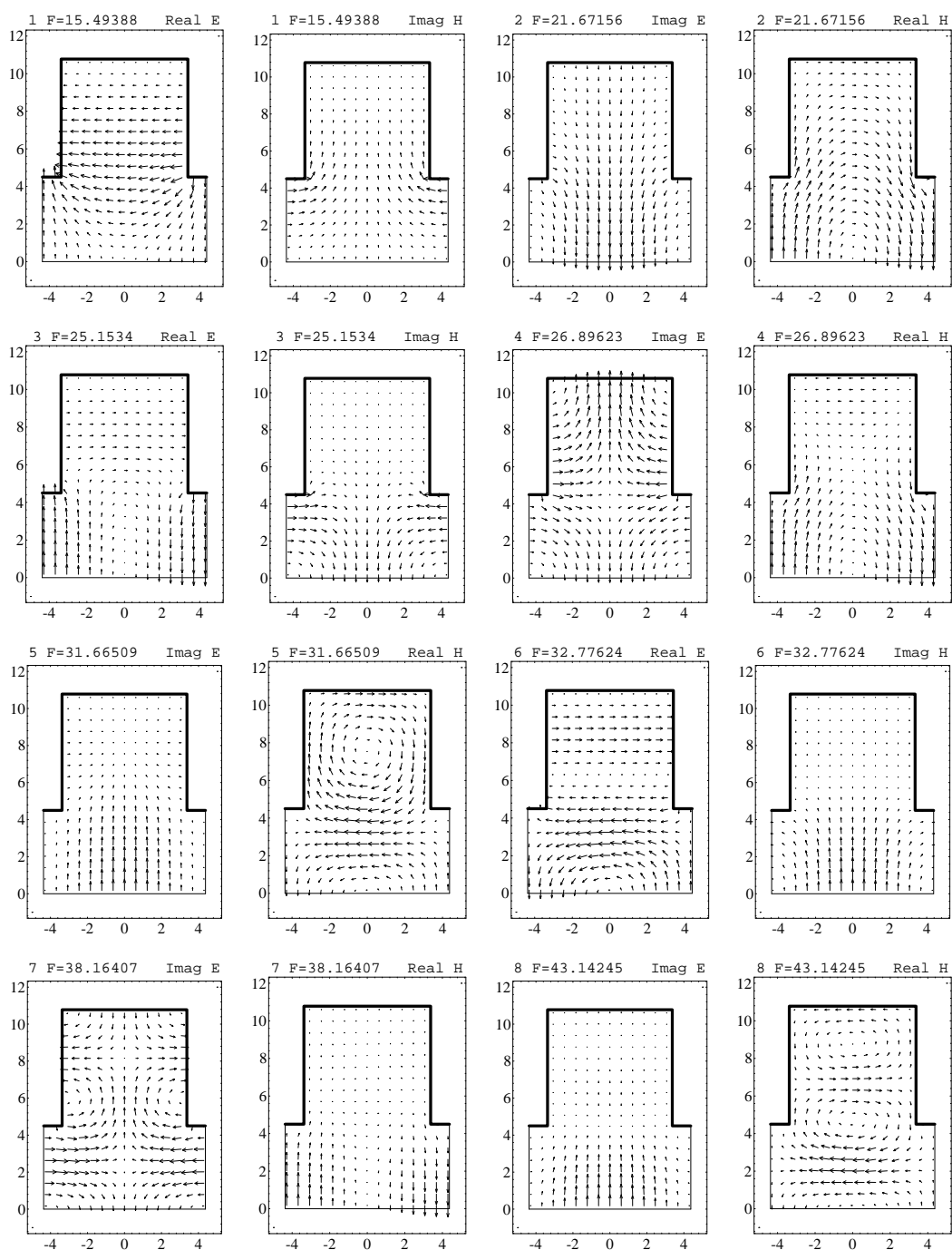


図 D.4: ディスク厚 $t=2.0$ [mm]、ディスク孔 $a=4.5$ [mm]、セル当たりの位相差 $\phi = \pi$ [rad.] のときの1~8番目のモードのフィールドパターン。

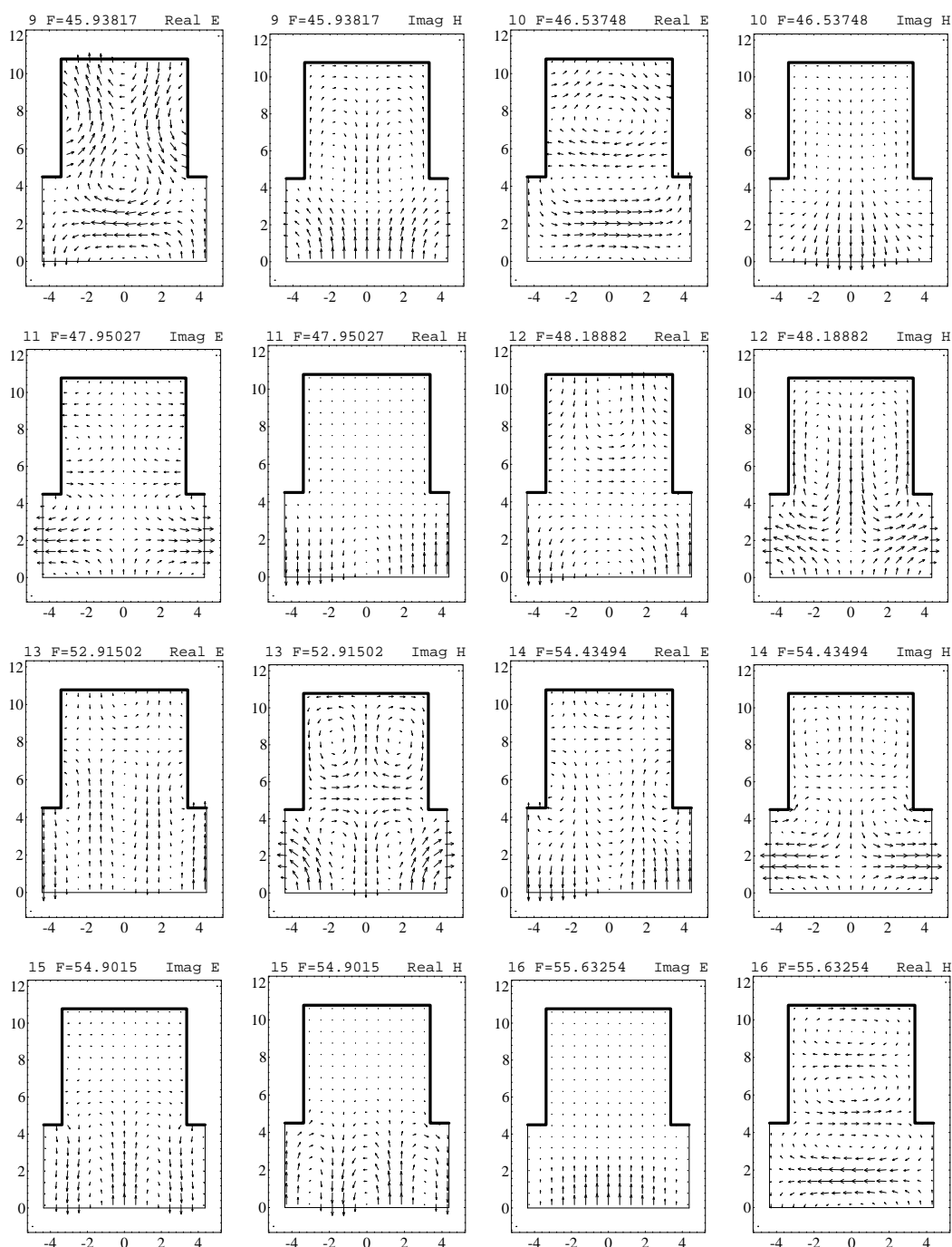


図 D.5: ディスク厚 $t=2.0$ [mm]、ディスク孔 $a=4.5$ [mm]、セル当たりの位相差 $\phi = \pi$ [rad.] のときの 9~16 番目のフィールドパターン。

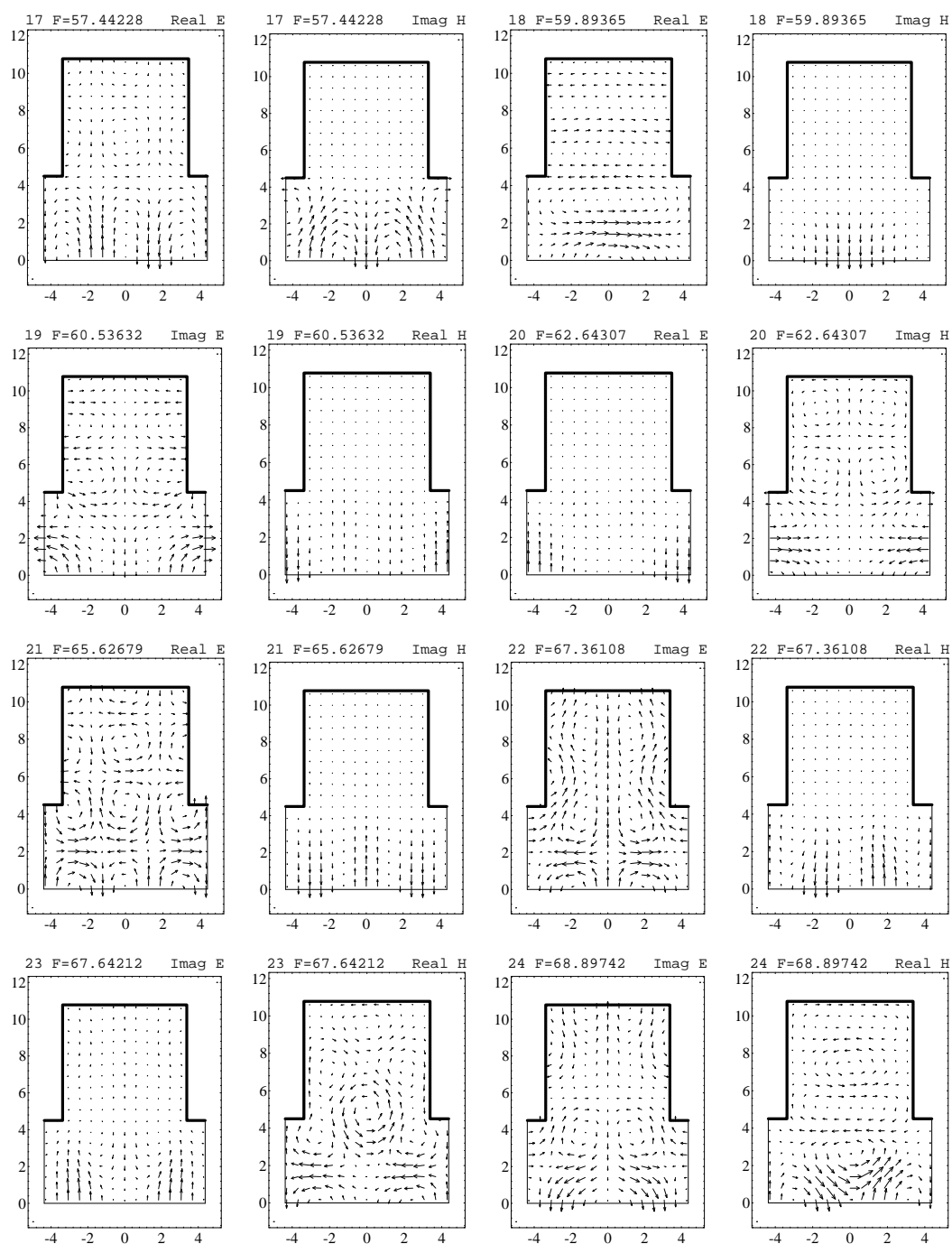


図 D.6: ディスク厚 $t=2.0$ [mm]、ディスク孔 $a=4.5$ [mm]、セル当たりの位相差 $\phi = \pi$ [rad.] のときの 17~24 番目のモードのフィールドパターン。

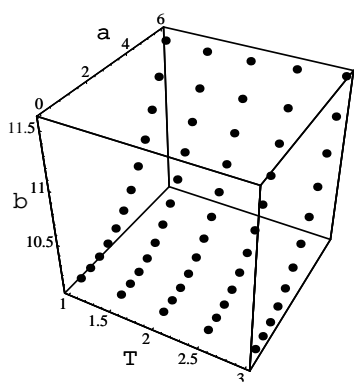
付録 E

ディスク形状の変化に対する双極モードの周波数とキック因子の変化

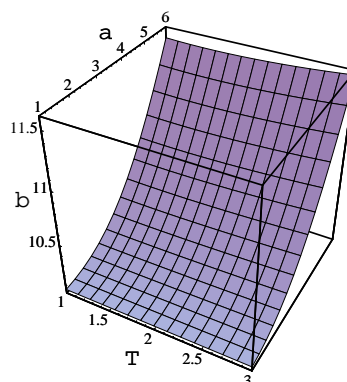
リニアコライダの周波数分散構造の場合、高次のモードまで周波数分布を制御する必要がある。その為に、通常用いられている定電界型加速管のようにディスク孔のみの変化では不十分で、その厚さも変化させる必要がある。そこで、周波数分散構造を考察する場合、ディスク孔や厚さに依存する双極モードの振る舞いを理解することが重要になってくる。このような理由から、周期構造の同期モードの周波数とキック因子のこれらに対する依存性を調べた。計算結果の考察については、2.3.2節で述べている。

計算は、付録 C に示すフィールドマッチングを用いた。ディスク厚を $t=1.0\sim 3.0$ [mm] まで 0.5 [mm] 間隔で、ディスク孔半径を $a=3.0\sim 6.0$ [mm] まで 0.5 [mm] 間隔で変化させ同期モードのパラメータを計算した。セル長は $D=8.7474$ [mm] で一定とし、セル内径 b は加速モード ($2\pi/3$ モード) の周波数が 11.424 [GHz] になるように調整している。フィールドマッチングで計算した加速セルの形状パラメータ $\{t, a, b\}$ の関係を図 E.1(a) に、それをフィットした結果を図 E.1(b) と式 (E.1) に示す。

$$\begin{aligned} b(a, t) = & 10.0505 - 0.019326a + 0.0116418a^2 + 0.0109218a^3 - 0.000848427a^4 \\ & + 0.0000756566t + 0.0108046at - 0.0161821a^2t + 0.00216635a^3t - 0.000085878a^4t \\ & - 0.00383098t^2 + 0.00164885at^2 + 0.00604296a^2t^2 - 0.000970259a^3t^2 + 0.0000461733a^4t^2 \\ & + 0.00204222t^3 - 0.00274559at^3 - 0.000199075a^2t^3 + 0.0000793059a^3t^3 - 5.43901 \times 10^{-6}a^4t^3 \\ & - 0.00027165t^4 + 0.000402344at^4 - 0.0000436972a^2t^4 + 2.31892 \times 10^{-6}a^3t^4 + 1.554 \times 10^{-8}a^4t^4 \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$



(a) フィールドマッチングの計算結果



(b) フィットした結果

図 E.1: 加速周波数が 11.424[GHz] のときのセルの形状

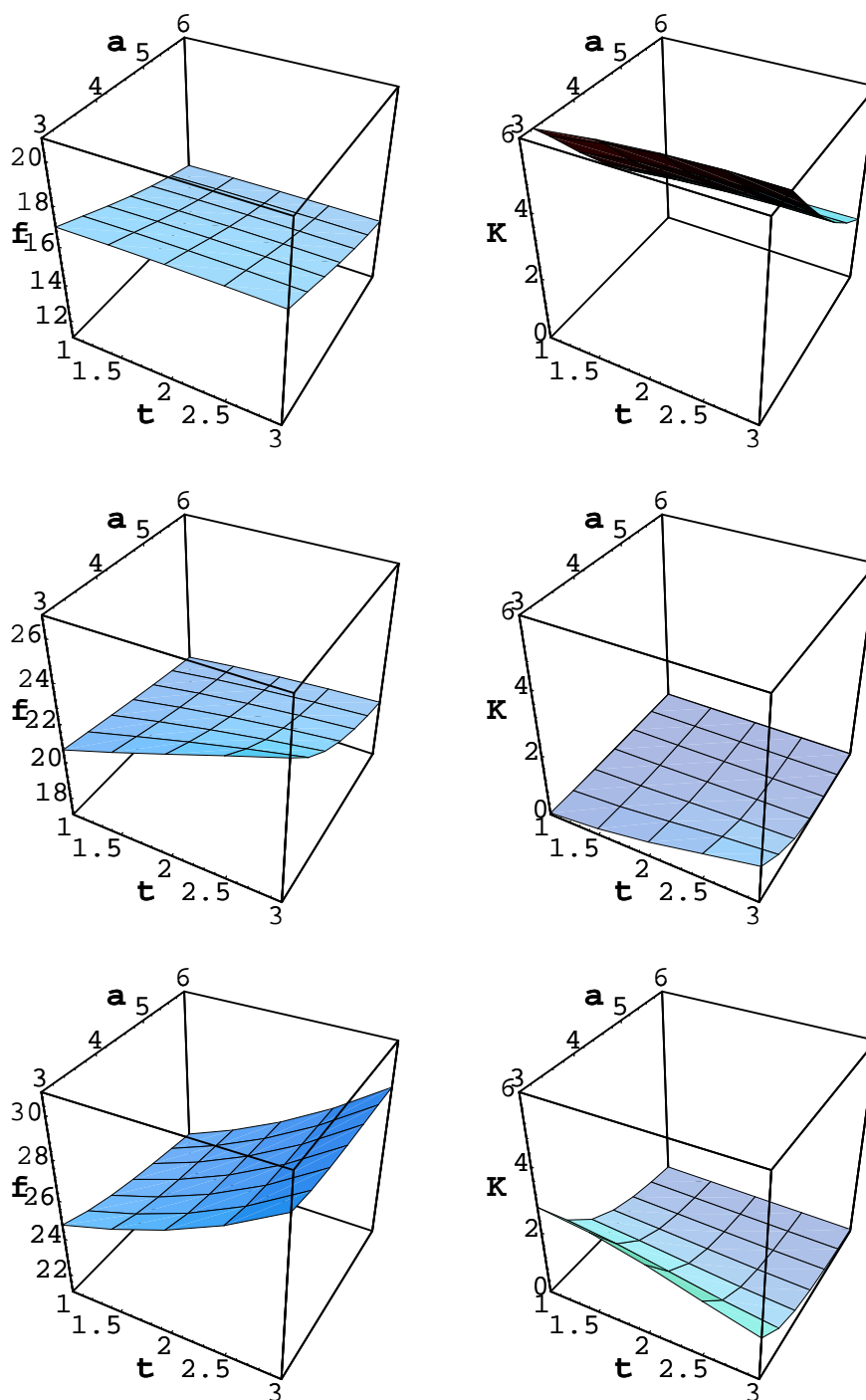


図 E.2: 1~3 番目の同期モードの周波数とキック因子。左図が周波数、右図がキック因子を表す。座標軸はディスク孔 a [mm]、ディスク厚 t [mm]、周波数 f [GHz]、キック因子 K [10^{14} V/C/m/Cell] をそれぞれ表す。

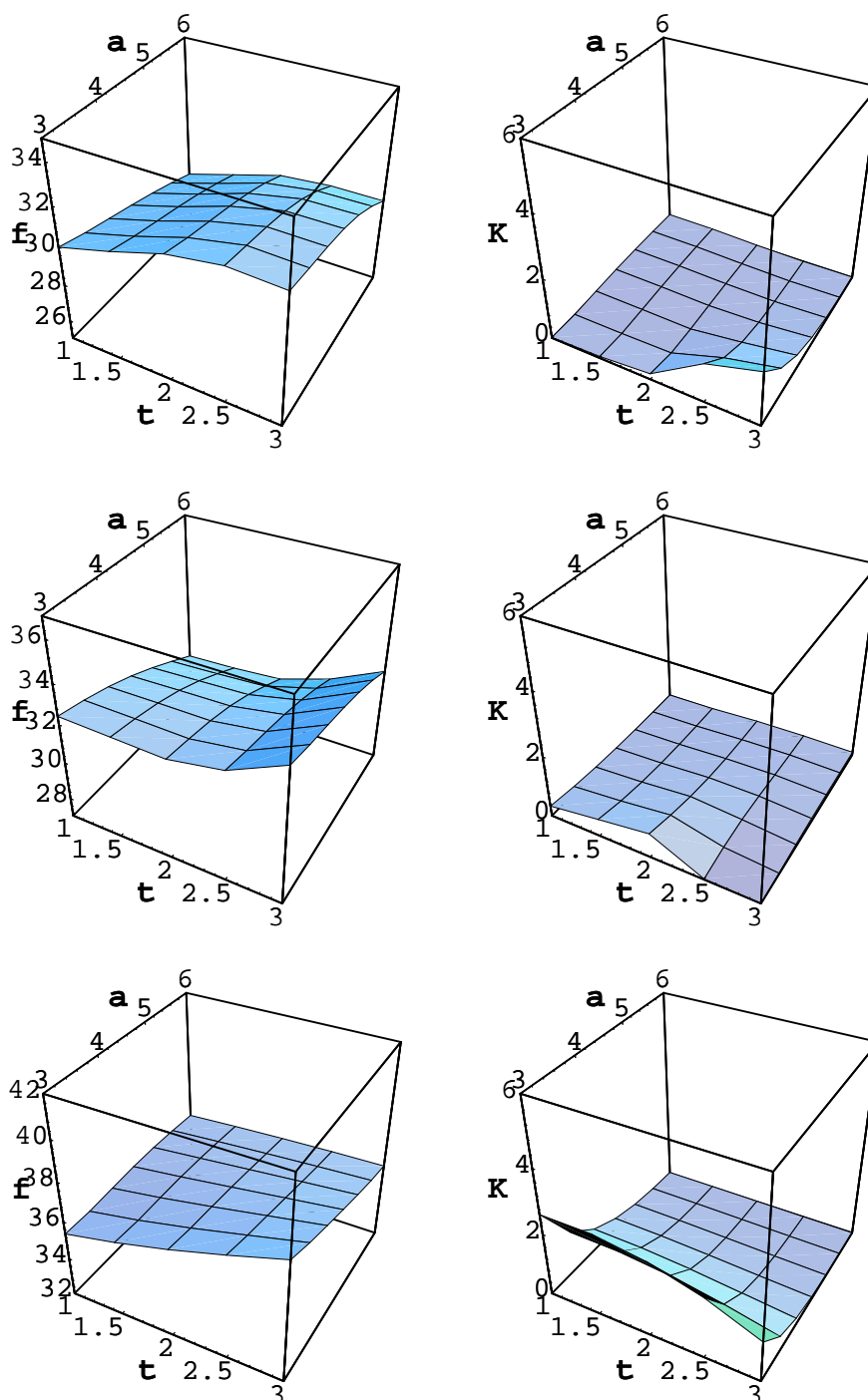


図 E.3: 4~6 番目の同期モードの周波数とキック因子。左図が周波数、右図がキック因子を表す。座標軸はディスク孔 a [mm]、ディスク厚 t [mm]、周波数 f [GHz]、キック因子 K [10¹⁴V/C/m/Cell] をそれぞれ表す。

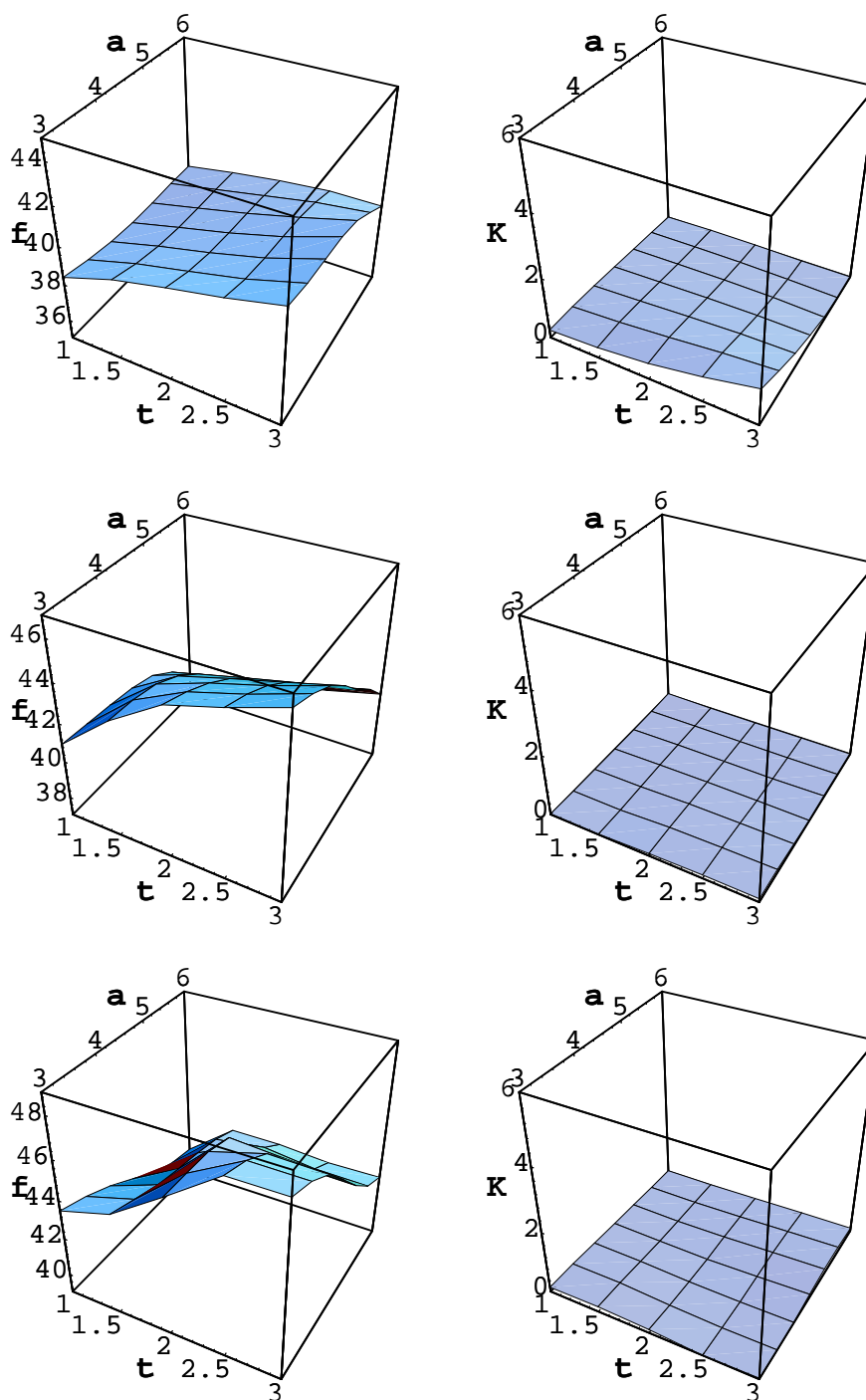


図 E.4: 7~9 番目の同期モードの周波数とキック因子。左図が周波数、右図がキック因子を表す。座標軸はディスク孔 a [mm]、ディスク厚 t [mm]、周波数 f [GHz]、キック因子 K [10¹⁴V/C/m/Cell] をそれぞれ表す。

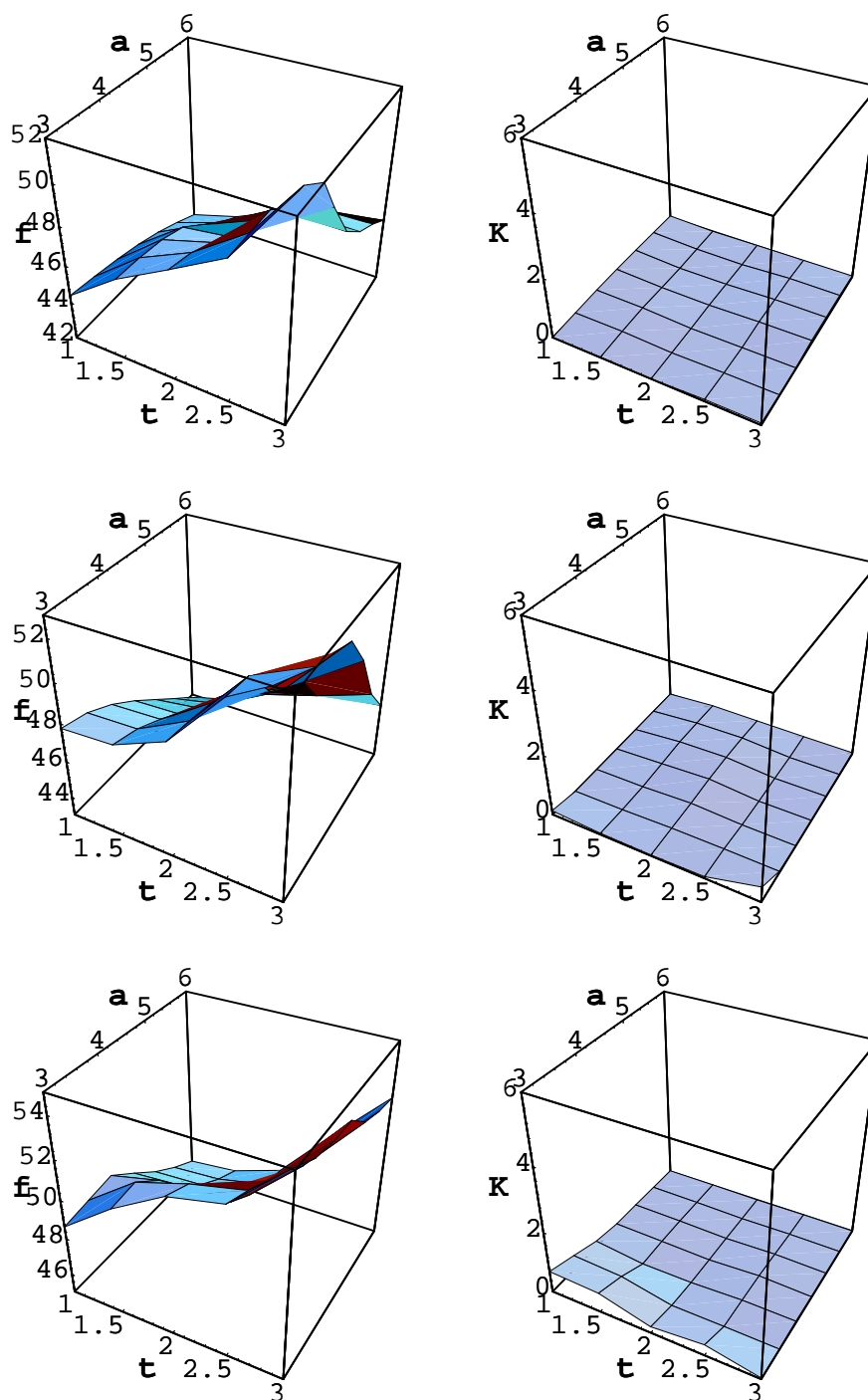


図 E.5: 10～12 番目の同期モードの周波数とキック因子。左図が周波数、右図がキック因子を表す。座標軸はディスク孔 a [mm]、ディスク厚 t [mm]、周波数 f [GHz]、キック因子 K [10^{14} V/C/m/Cell] をそれぞれ表す。

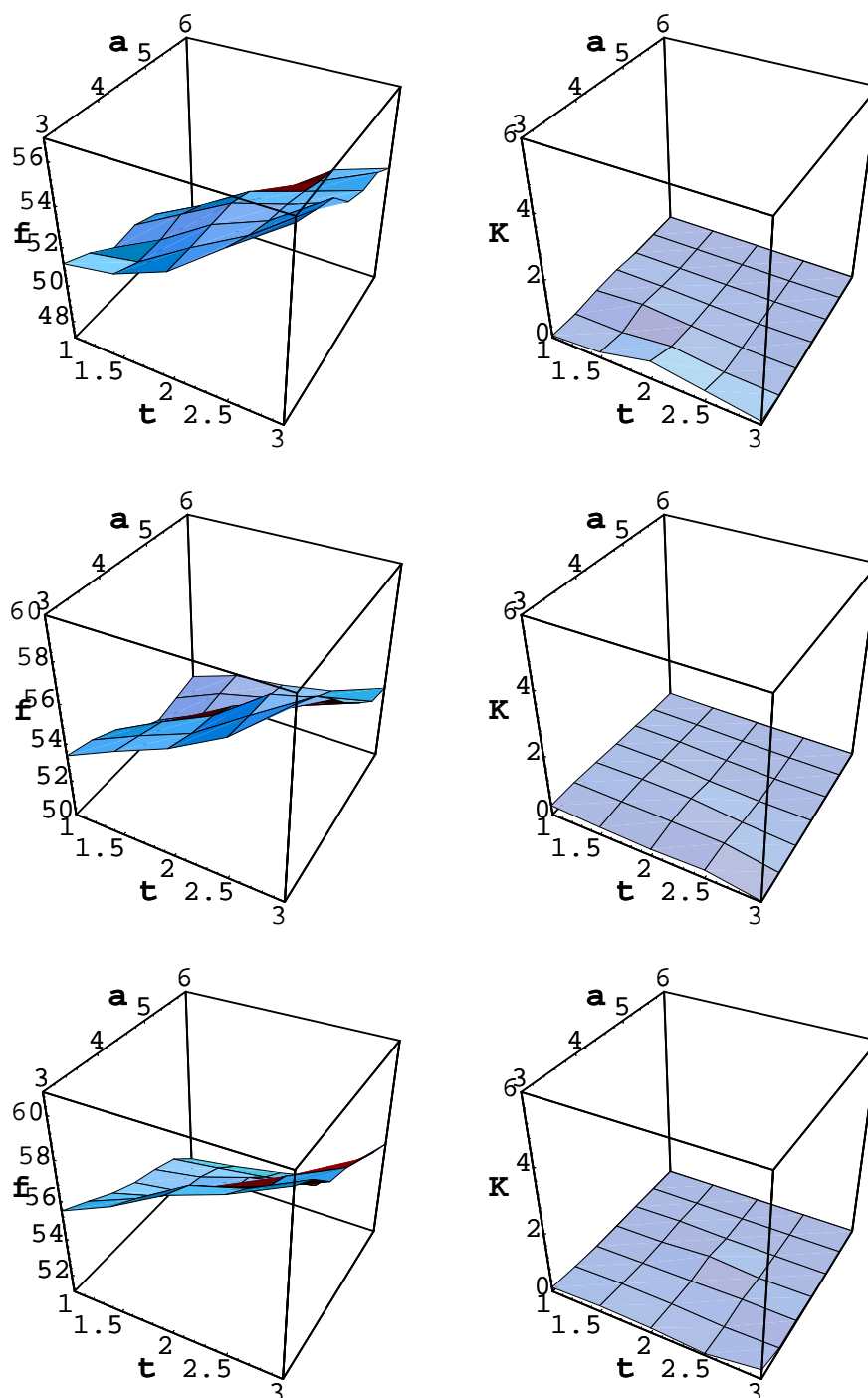


図 E.6: 13～15 番目の同期モードの周波数とキック因子。左図が周波数、右図がキック因子を表す。座標軸はディスク孔 a [mm]、ディスク厚 t [mm]、周波数 f [GHz]、キック因子 K [10^{14} V/C/m/Cell] をそれぞれ表す。

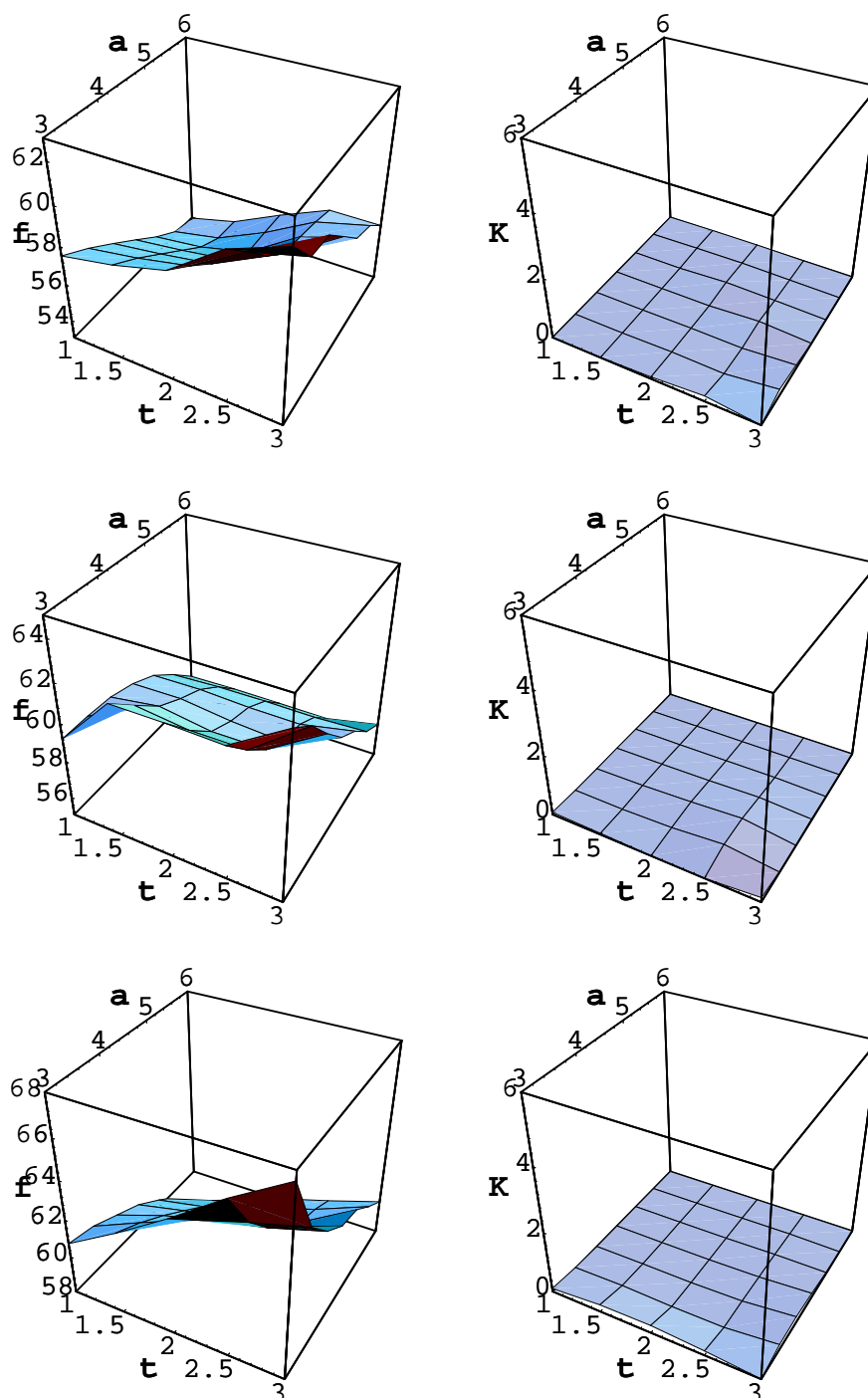


図 E.7: 16～18 番目の同期モードの周波数とキック因子。左図が周波数、右図がキック因子を表す。座標軸はディスク孔 a [mm]、ディスク厚 t [mm]、周波数 f [GHz]、キック因子 K [10^{14} V/C/m/Cell] をそれぞれ表す。

付録 F

行列 \mathbf{X} の性質

F.1 行列 \mathbf{X} のエルミート性

損失の無いセル内の電磁場の周波数は実数でなくてはならない。また、各モードの電磁場は直交しなくてはならないのは、付録 B の示すとおりである。そのためには、行列 \mathbf{X} の全ての固有値 ω が実数かつその全ての固有ベクトル \mathbf{a} が直交していることが要求される。このことを満足するためには、行列 \mathbf{X} がエルミートであることが必要十分条件である。

そこでこの行列 \mathbf{X} がエルミートであることを示すために、式 (3.62) のように行列を分解し、各々がエルミートであることを示す。

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_K + \mathbf{X}_C \cos(\phi) + i\mathbf{X}_S \sin(\phi) \quad (\text{F.1})$$

各々の行列がエルミートである条件は、

$$\mathbf{X}_K^\dagger = \mathbf{X}_K \quad (\text{F.2})$$

$$\mathbf{X}_C^\dagger = \mathbf{X}_C \quad (\text{F.3})$$

$$\mathbf{X}_S^\dagger = -\mathbf{X}_S \quad (\text{F.4})$$

である。ここで、添字記号 \dagger は随伴行列を表す。各々の行列は、次式の通り定義されている [式 (3.63), (3.64), (3.65)]。

$$\mathbf{X}_K = \frac{c}{2} \mathbf{V}^{-1} \bar{\Omega} (\bar{S} \mathbf{M} \mathbf{S} + \mathbf{M}) + \mathbf{V}^{-1} \bar{\Omega}^2 \mathbf{V} \quad (\text{F.5})$$

$$\mathbf{X}_C = \frac{c}{2} \mathbf{V}^{-1} \bar{\Omega} (\bar{S} \mathbf{M} + \mathbf{M} \mathbf{S}) \quad (\text{F.6})$$

$$\mathbf{X}_S = \frac{c}{2} \mathbf{V}^{-1} \bar{\Omega} (\bar{S} \mathbf{M} - \mathbf{M} \mathbf{S}) \quad (\text{F.7})$$

$\mathbf{X}_K, \mathbf{X}_C, \mathbf{X}_S$ を表す行列のうち、 $\bar{\Omega}, \bar{S}, \mathbf{S}$ は対角行列である。加えて、 \bar{S} と \mathbf{S} 行列の対角成分は、1 か -1 である。行列 \mathbf{V} の i, j 成分 v_{ij} は式 (3.39) から、

$$v_{ij} = \int_V \bar{\mathbf{e}}_i^* \cdot \mathbf{e}_j dv \quad (\text{F.8})$$

と定義されている。オープンモード \hat{e}_j とショートモード \hat{e}_i^* はそれぞれ 1 に規格化された直交関数系であるから、行列 \mathbf{V} はユニタリー行列になる。

\mathbf{X}_K がエルミート行列であることを示す。式 (3.45) を変形すると、

$$\mathbf{V}\hat{\Omega}^2 - \bar{\Omega}^2\mathbf{V} = c\bar{\Omega}(\bar{\mathbf{S}}\mathbf{M}\acute{\mathbf{S}} + \mathbf{M}) \quad (\text{F.9})$$

となり、これを式 (F.5) に代入すると、 \mathbf{X}_K はユニタリー行列 \mathbf{V} を用いて記述できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_K &= \frac{c}{2}\mathbf{V}^{-1}\bar{\Omega}c^{-1}\bar{\Omega}^{-1}(\mathbf{V}\hat{\Omega}^2 - \bar{\Omega}^2\mathbf{V}) + \mathbf{V}^{-1}\bar{\Omega}^2\mathbf{V} \\ &= \frac{1}{2}(\hat{\Omega}^2 - \mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V}) + \mathbf{V}^{-1}\bar{\Omega}^2\mathbf{V} \\ &= \frac{1}{2}(\hat{\Omega}^2 + \mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V}) \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

したがって、

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_K^\dagger &= \frac{1}{2}(\hat{\Omega}^2 + \mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V})^\dagger \\ &= \frac{1}{2}(\hat{\Omega}^2 + \mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V}) \\ &= \mathbf{X}_K \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

となり、 \mathbf{X}_K の随伴行列 \mathbf{X}_K^\dagger が元の行列 \mathbf{X}_K に等しいので、 \mathbf{X}_K はエルミート行列であることが証明された。

次に、 \mathbf{X}_C がエルミート行列であることを示す。このときもまた \mathbf{X}_K がエルミートであることを示したときと同様に、行列 \mathbf{M} 代わりに \mathbf{V} を用いて式を書き直す。そのために式 (F.6) 右辺を変形させて、式 (F.9) を代入する。このとき、行列 $\acute{\mathbf{S}}$ は実対角行列でありその成分は 1 か -1 であるから、その逆行列は元の行列に等しいことを利用している。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_C &= \frac{c}{2}\mathbf{V}^{-1}\bar{\Omega}(\bar{\mathbf{S}}\mathbf{M} + \mathbf{M}\acute{\mathbf{S}}) \\ &= \frac{c}{2}\mathbf{V}^{-1}\bar{\Omega}(\bar{\mathbf{S}}\mathbf{M}\acute{\mathbf{S}} + \mathbf{M})\acute{\mathbf{S}} \\ &= \frac{c}{2}\mathbf{V}^{-1}\bar{\Omega}c^{-1}\bar{\Omega}^{-1}(\mathbf{V}\hat{\Omega}^2 - \bar{\Omega}^2\mathbf{V})\acute{\mathbf{S}} \\ &= \frac{1}{2}(\hat{\Omega}^2 - \mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V})\acute{\mathbf{S}} \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

したがって、 \mathbf{X}_C の随伴行列 \mathbf{X}_C^\dagger は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_C^\dagger &= \frac{1}{2}\acute{\mathbf{S}}^\dagger(\hat{\Omega}^2 - \mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V})^\dagger \\ &= \frac{1}{2}\acute{\mathbf{S}}(\hat{\Omega}^2 - \mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V}) \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

この式を見てもわかるように、 \mathbf{X}_C がエルミート行列であることを示すためには、行列 $\acute{\mathbf{S}}$ と行列 $(\hat{\Omega}^2 - \mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V})$ が交換可能であることを示せばよい。行列 $\acute{\mathbf{S}}$ と行列 $\hat{\Omega}^2$ は、ともに対角行列であるため交換可能であることは明らかである。

$$\acute{\mathbf{S}}\hat{\Omega}^2 = \hat{\Omega}^2\acute{\mathbf{S}} \quad (\text{F.14})$$

つぎに、 \mathbf{V} 行列の性質を考える。この行列の成分 v_{ij} は、 i 番目のショートモードと j 番目のオープンモードとの内積から計算される。当然、対称モードと反対称モードとの内積となる成分の値はゼロとなる。従って次式が成り立つことは明らかであろう。

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{S}}\mathbf{V}\acute{\mathbf{S}} \quad (\text{F.15})$$

行列 $\bar{\mathbf{S}}$ および $\acute{\mathbf{S}}$ はともにエルミート行列であることを注意して、この式の随伴形をとると、

$$\mathbf{V}^\dagger = \acute{\mathbf{S}}\mathbf{V}^\dagger\bar{\mathbf{S}} \quad (\text{F.16})$$

となる。そして式 (F.15)(F.16) を用い、 $\acute{\mathbf{S}}^2$ と $\bar{\mathbf{S}}^2$ が単位行列になることと $\bar{\mathbf{S}}$ と $\bar{\Omega}^2$ が交換可能であることに注意すると、次式のように行列 $\acute{\mathbf{S}}$ と行列 $\mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V}$ が交換可能であることが示される。

$$\begin{aligned} \acute{\mathbf{S}}\mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V} &= \acute{\mathbf{S}}\acute{\mathbf{S}}\mathbf{V}^\dagger\bar{\mathbf{S}}\bar{\Omega}^2\bar{\mathbf{S}}\mathbf{V}\acute{\mathbf{S}} \\ &= \mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V}\acute{\mathbf{S}} \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

交換可能を示している 2 式 (F.14)(F.17) を用いて、式 (F.13) を変形する。すると、 \mathbf{X}_C もまたエルミート行列であることが示される。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_C^\dagger &= \frac{1}{2}\acute{\mathbf{S}}(\acute{\Omega}^2 - \mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V}) \\ &= \frac{1}{2}(\acute{\Omega}^2 - \mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V})\acute{\mathbf{S}} \\ &= \mathbf{X}_C \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

$i\mathbf{X}_S$ がエルミート行列である証明は本研究ではできなかった。しかし、以下に示す理由から、この行列はエルミート行列であると信じている。

- 無損失の加速セル内の電磁場は、異なるモード間の電磁場は直交しており、全ての周波数は実数である。この電磁場のオープンモード（直交関数）展開を表す行列 \mathbf{X} はエルミートである必要がある。
- 行列 \mathbf{X} を導く過程で、いかなる近似も用いていない。
- \mathbf{X}_K と \mathbf{X}_C がエルミート行列である。

このようなことから、本論文では $i\mathbf{X}_S$ はエルミート行列と仮定して議論を進めている。また、本研究を行う上で参考とした R. M. Bevenssee の論文 [31] では、これは”consistency condition”としている。

F.2 行列 \mathbf{X} の成分の分布

行列 \mathbf{X} の成分の分布、特にその成分がゼロとなる分布を調べる。そのための準備として、式 (F.15) と式 (F.16) を次式のように変形する。

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \frac{1}{2}(\mathbf{V} + \bar{\mathbf{S}}\mathbf{V}\acute{\mathbf{S}}) \\ \mathbf{V}^\dagger &= \frac{1}{2}(\mathbf{V}^\dagger + \acute{\mathbf{S}}\mathbf{V}^\dagger\bar{\mathbf{S}})\end{aligned}\quad (\text{F.19})$$

これらの式は、オープンモードとショートモードの対称性が反対ならばその内積の積分（行列 \mathbf{V} の成分）はゼロになることを明示している。そして、行列 \mathbf{X}_K の成分の分布を調べるために、これらの式 (F.19) を式 (F.10) に代入して次のように変形する。

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_K &= \frac{1}{2}(\acute{\Omega}^2 + \mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V}) \\ &= \frac{1}{2}\acute{\Omega}^2 + \frac{1}{4}(\mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V} + \acute{\mathbf{S}}\mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V}\acute{\mathbf{S}})\end{aligned}\quad (\text{F.20})$$

この結果から、行列 \mathbf{X}_K の成分 x_{Kij} はオープンモードの対称性を表す対角行列 $\acute{\mathbf{S}}$ の成分が $s_{ii} \neq s_{jj}$ のときゼロになることがわかる。言い換えれば、成分 x_{Kij} は i 番目のオープンモードと j 番目のオープンモードの対称性が異なるときにゼロとなり、その他のときは有限な値を持つ。

次に、行列 \mathbf{X}_C 成分の分布を調べる。そのために、行列 \mathbf{X}_K の成分の分布を調べたのと同様に、式 (F.12) に式 (F.19) を代入して次式のように変形する。

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_C &= \frac{1}{2}(\acute{\Omega}^2 - \mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V})\acute{\mathbf{S}} \\ &= \frac{1}{2}\acute{\Omega}^2\acute{\mathbf{S}} - \frac{1}{4}(\mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V} + \acute{\mathbf{S}}\mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V}\acute{\mathbf{S}})\acute{\mathbf{S}} \\ &= \frac{1}{2}\acute{\Omega}^2\acute{\mathbf{S}} - \frac{1}{4}(\mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V}\acute{\mathbf{S}} + \acute{\mathbf{S}}\mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}^2\mathbf{V})\end{aligned}\quad (\text{F.21})$$

この結果から、行列 \mathbf{X}_C の場合も行列 \mathbf{X}_K の場合同様、その成分 x_{Cij} は i 番目のオープンモードと j 番目のオープンモードの対称性が異なるときにゼロとなり、その他のときは有限な値を持つ。

つぎに、行列 \mathbf{X}_S 成分の分布を調べる。その為に、式 (F.7) を変形し、式 (F.16) を代入し、次式を得る。

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_S &= \frac{c}{2}\mathbf{V}^{-1}\bar{\Omega}(\bar{\mathbf{S}}\mathbf{M} - \mathbf{M}\acute{\mathbf{S}}) \\ &= \frac{c}{2}(\mathbf{V}^\dagger\bar{\mathbf{S}}\bar{\Omega}\mathbf{M} - \mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}\mathbf{M}\acute{\mathbf{S}}) \\ &= \frac{c}{2}(\acute{\mathbf{S}}\mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}\mathbf{M} - \mathbf{V}^\dagger\bar{\Omega}\mathbf{M}\acute{\mathbf{S}})\end{aligned}\quad (\text{F.22})$$

この結果から、行列 \mathbf{X}_S の場合は、その成分 x_{Sij} は i 番目のオープンモードと j 番目のオープンモードの対称性が同じときにゼロとなり、その他のときは有限な値である。

以上をまとめると、次式のようになる。

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{Kij} + x_{Cij} \cos(\phi) & (s_{ii} = s_{jj} \text{ の場合}) \\ ix_{Sij} \sin(\phi) & (s_{ii} \neq s_{jj} \text{ の場合}) \end{cases} \quad (\text{F.23})$$

F.3 行列 \mathbf{X} のトレース

最後にこの \mathbf{X} 行列のトレースを考える。

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{X}) &= \text{tr}(\mathbf{X}_K) + \text{tr}(\mathbf{X}_C) \cos(\phi) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[\hat{\Omega}^2 \{ \mathbf{E} + \hat{\mathbf{S}} \cos(\phi) \} \right] + \frac{1}{4} \text{tr} \left[(\mathbf{V}^\dagger \bar{\Omega}^2 \mathbf{V} + \hat{\mathbf{S}} \mathbf{V}^\dagger \bar{\Omega}^2 \mathbf{V} \hat{\mathbf{S}}) \{ \mathbf{E} - \hat{\mathbf{S}} \cos(\phi) \} \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[\hat{\Omega}^2 \{ \mathbf{E} + \hat{\mathbf{S}} \cos(\phi) \} \right] + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\bar{\Omega}^2 \{ \mathbf{E} - \hat{\mathbf{S}} \cos(\phi) \} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.24})$$

この結果と行列のトレースは固有値の和になることから、次に示すことがわかる。

1. $\phi = 0$ 場合

この場合 $\text{tr}(\mathbf{X})$ は、オープンモードかつ反対称モードの $\hat{\Omega}^2$ の和とショートモードかつ対称モードの $\bar{\Omega}^2$ の和の合計になる。このことは、 $\phi = 0$ のモードはそれらから構成されているので当然の結果である。

2. $\phi = \frac{\pi}{2}$ 場合

この場合 $\text{tr}(\mathbf{X})$ は、オープンモードの $\hat{\Omega}^2$ の和とショートモードの $\bar{\Omega}^2$ の和の合計になる。

3. $\phi = \pi$ 場合

この場合 $\text{tr}(\mathbf{X})$ は、オープンモードかつ対称モードの $\hat{\Omega}^2$ の和とショートモードかつ反対称モードの $\bar{\Omega}^2$ の和の合計になる。このことは、 $\phi = \pi$ のモードはそれらから構成されているので当然の結果である。

付録 G

オープンモード 展開に於けるキック 因子の 計算

本付録では、オープンモード展開の結果から双極モードのキック因子を計算する方法を示す。

G.1 周期構造のキック 因子の計算

本節では、周期構造のオープンモード展開の結果から双極モードのキック因子を求める。

周期構造のキック 因子についての考察

1.2.2節によれば、周期構造のセル当たりの双極モードのキック因子 \tilde{k}_\perp は、

$$\tilde{k}_\perp = \frac{c|V|^2}{4a^2\omega U} \quad (\text{G.1})$$

と定義されている。ここで、 c , a , ω , U は、それぞれ光速、ディスク孔の半径、周波数、セル当たりの蓄積エネルギー (stored energy) である。また、電圧 V は

$$V = \int E_z(z, r = a) e^{ikz} dz \quad (\text{G.2})$$

である。ここで、 $E_z(z, r = a)$ は電場の z 方向成分である。この積分範囲は、1つの加速セルの左端から右端まで、すなわち1周期分である。式中の k は、

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (\text{G.3})$$

と評価される波数である。

オープンモード展開での蓄積エネルギー

まず初めに、単加速セル内の蓄積エネルギーを評価する。蓄積エネルギー U は、

$$U = \frac{\varepsilon}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV \quad (\text{G.4})$$

である。オープンモード展開したときの電場は、

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^{N_{\text{opn}}} a_j \mathbf{e}_j \quad (\text{G.5})$$

と書き表せる。ここで、 \mathbf{e}_j は j 番目のオープンモードであり、 a_j はその成分を表し、 N_{opn} 展開するオープンモードの数を表す。ここで各オープンモードは直交しており、またその積分は1に規格化されているので、

$$\int_V \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j^* dv = \delta_{ij} \quad (\text{G.6})$$

である。加えて、展開の成分についても次式のように規格化する。

$$\sum_{j=1}^{N_{\text{opn}}} a_j a_j^* = 1 \quad (\text{G.7})$$

以上のことから、単加速セル内の蓄積エネルギーは

$$U = \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{G.8})$$

となる。

オープンモード展開での電圧

次に双極モードの空洞内電圧を求める。 j 番目のオープンモードの $r = a$ の場所での電場の z 方向成分 $\mathbf{e}_{zj}(z)$ は、式 (C.72) から次式のように書き表すことができる。

$$\mathbf{e}_{zj}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \bar{C}_{js} \cos\{\alpha_s(z+g)\} \cos(\theta) \quad (\text{G.9})$$

ここで、セルの中心が $z = 0$ である。 \bar{C}_{js} は領域 $[-g, g]$ での j 番目のオープンモードの電場の s 番目のフーリエ成分であり、フィールドマッチングのコードから計算される。 g は、図 C.1に示すようにセルのギャップ長の半分の長さである。また α_s は、

$$\alpha_s = \frac{\pi s}{2g} \quad (\text{G.10})$$

である。

このフーリエ展開された電場を用いると、単加速セルの電圧 V は

$$\begin{aligned}
 V &= \sum_{j=1}^{N_{opn}} \sum_{s=0}^{\infty} \int_{-g}^g a_j \bar{C}_{js} \cos[\alpha_s \{z + g\}] e^{ikz} dz \\
 &= \sum_{js} \begin{cases} a_j \bar{C}_{js} \frac{-ie^{-igk} [-k + e^{2igk} \{k \cos(2\alpha_s g) - i\alpha_s \sin(2\alpha_s g)\}]}{k^2 - \alpha_s^2} & \text{for } k \neq \alpha_s \\ a_j \bar{C}_{js} \frac{e^{igk} [2gke^{-2igk} + \sin(2gk)]}{2k} & \text{for } k = \alpha_s \end{cases} \quad (\text{G.11})
 \end{aligned}$$

となる。

以上より、単加速セルの蓄積エネルギーと電圧が計算できる。式 (G.1) にこれらの値を代入してキック因子を計算する。

G.2 非周期構造のキック因子の計算

非周期構造ではセル毎にディスク孔の半径が異なるため、周期構造のように $r = a$ の場所で加速管入口から出口まで積分できない。そこで、図 G.1 に示す経路で積分を行う。セル当たりの形状変化が非常に小さいならば、キック因子は次式のように書き表すことができるだろう。

$$\tilde{k}_{\perp} = \frac{c|V'|^2}{4\omega U} \quad (\text{G.12})$$

$$|V'|^2 \cong \left| \int \frac{E_z e^{ikz}}{r} dz \right|^2 \quad (\text{G.13})$$

オープンモード展開での蓄積エネルギー

キック因子を計算するために、まず初めに蓄積エネルギー U を求める。蓄積エネルギー U は、

$$U = \frac{\varepsilon}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV \quad (\text{G.14})$$

である。オープンモードで展開したときの電場 \mathbf{E} は、

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^{N_{cell}} \sum_{\ell=1}^{N_{opn}} a_{n\ell} \hat{\mathbf{e}}_{n\ell} \quad (\text{G.15})$$

になる。ここで、 $\hat{\mathbf{e}}_{n\ell}$ と $a_{n\ell}$ は、 n 番目のセルの ℓ 番目のオープンモードとその成分を表す。また N_{cell} はセル数を、 N_{opn} は展開するオープンモードの数を表す。各セルのオープンモードの電磁場は直交しているし、セルの番号の違うオープンモードは定義域の座標が異なるので、次式の関係が成り立つ。

$$\int \hat{\mathbf{e}}_{n\ell} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{n'\ell'} = \delta_{nn'} \delta_{\ell\ell'} \quad (\text{G.16})$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーの記号である。また、オープンモード展開の係数 a_{nl} には、次のような規格化条件を課す。

$$\sum_{n=1}^{N_{cell}} \sum_{\ell=1}^{N_{opn}} a_{nl} a_{nl}^* = 1 \quad (\text{G.17})$$

これらのことから、空洞内の蓄積エネルギー U は次式のようにになる。

$$U = \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{G.18})$$

オープンモード展開での電圧

次に双極モードの空洞内電圧を求める。非周期構造の場合、図 G.1に点線で示すような経路で電場 E_z の積分を行う。

n 番目のセルの ℓ 番目のオープンモードの $r = r_n$ の場所での電場の z 方向成分 $\dot{e}_{znl}(\xi)$ は、式(C.72)より、次式のように書き表すことができる。

$$\dot{e}_{znl}(\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \bar{C}_{nls} \cos\{\alpha_s(\xi + g)\} \cos(\theta) \quad (\text{G.19})$$

ここで、 ξ は各セルの中心をゼロとした場合の局所座標であり、 n 番目のセルのその座標($\xi = 0$)は、

$$z = \left(n - \frac{1}{2}\right) D \quad (\text{G.20})$$

である。また \bar{C}_{nls} は領域 $[-g, g]$ での n 番目のセルの ℓ 番目のオープンモードの電場の s 番目のフーリエ成分である。 g は、図 G.1に示すようにセルのギャップ長の半分の長さである

このフーリエ展開された電場を用いると、周期構造の入口から出口にわたって図 G.1に示す経路での電圧 V' は、次のようになる。

$$\begin{aligned} V' &= \sum_{n=1}^{N_{cell}} \sum_{\ell=1}^{N_{opn}} \sum_{s=0}^{\infty} \int_{(n-1)D}^{nD} r_n^{-1} a_{nl} \bar{C}_{nls} \cos[\alpha_s \{z - (2n-1)D/2 + g\}] e^{ikz} dz \\ &= \sum_{nls} \begin{cases} \frac{a_{nl} \bar{C}_{nls} - i e^{-igk} [-k + e^{2igk} \{k \cos(2\alpha_s g) - i \alpha_s \sin(2\alpha_s g)\}]}{r_n} e^{ikD(2n-1)/2} & \text{for } k \neq \alpha_s \\ \frac{a_{nl} \bar{C}_{nls} e^{igk} [2gk e^{-2igk} + \sin(2gk)]}{r_n} e^{ikD(2n-1)/2} & \text{for } k = \alpha_s \end{cases} \quad (\text{G.21}) \end{aligned}$$

以上の計算より、蓄積エネルギー U と双極モードの電圧 V' をオープンモード展開で評価することができるので、非周期構造のキック因子が計算できる。

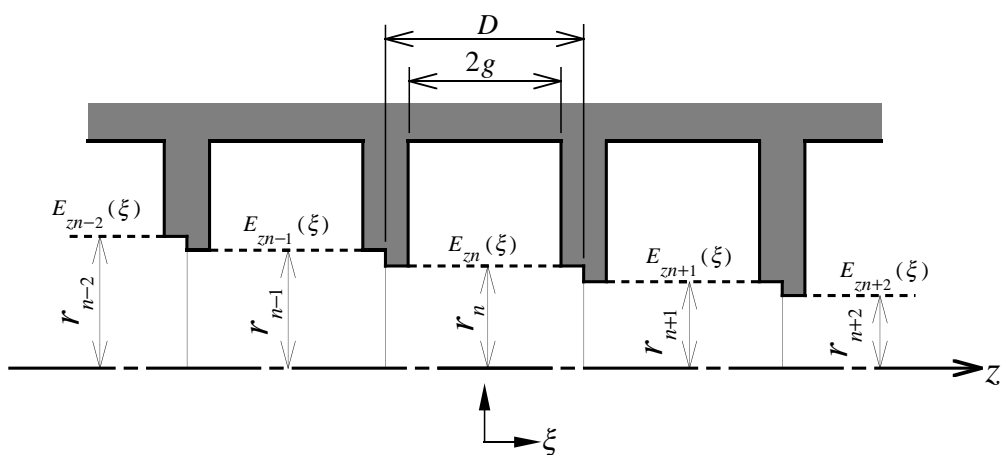


図 G.1: 非周期構造の電場の積分経路。点線に沿って E_z の線積分を行う。

付録 H

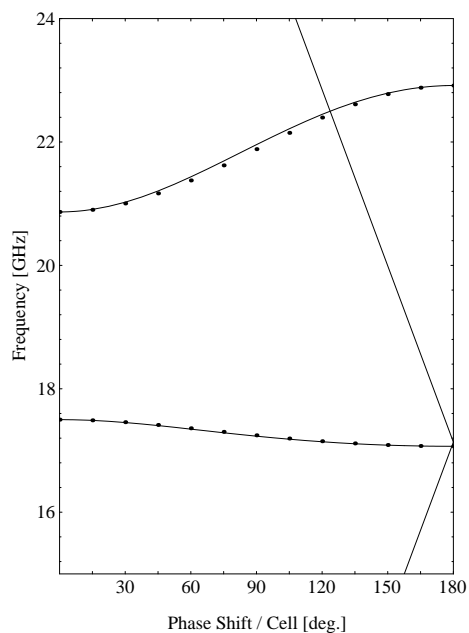
フィールドの積分から直接行列 X を評価した場合

本付録では、3.3.2節に示した方法、すなわち直接フィールドの積分から行列 X を評価してオープンモード展開を行う方法とフィールドマッチングの比較を行う。計算方法および結果についての考察は、3.3.2節に述べる。

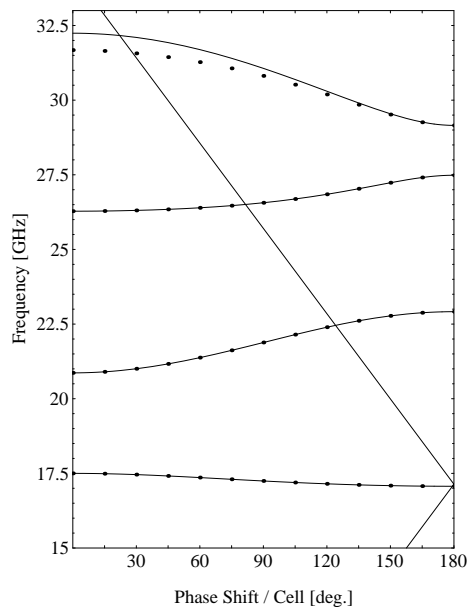
ディスク孔 $a=3.0, 4.5, 6.0$ [mm] の3種類の周期構造の分散関係とキック因子について、両者の比較を行った。計算した加速セルの詳細形状と計算結果の図番号を表 H.1に示す。展開するオープンモードの個数は2, 4, 8, 16とした。

表 H.1: 加速セルの形状と計算結果の図番号

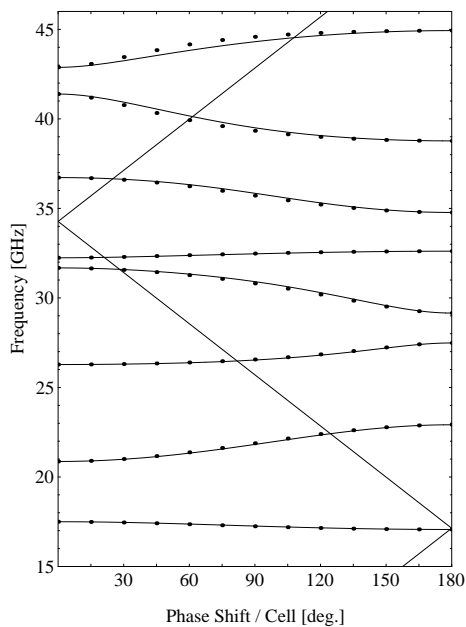
ディスク孔 a [mm]	セル径 b [mm]	セル長 D [mm]	ディスク厚 t [mm]	図番号	
				分散関係	キック因子
3.0	10.29130	8.7474	2.0	図 H.1	図 H.4
4.5	10.77871	8.7474	2.0	図 H.2	図 H.5
6.0	11.51258	8.7474	2.0	図 H.3	図 H.6



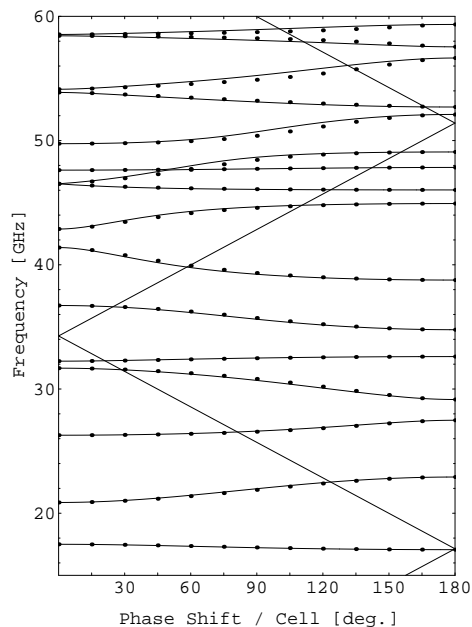
(a); 2 モード



(b); 4 モード

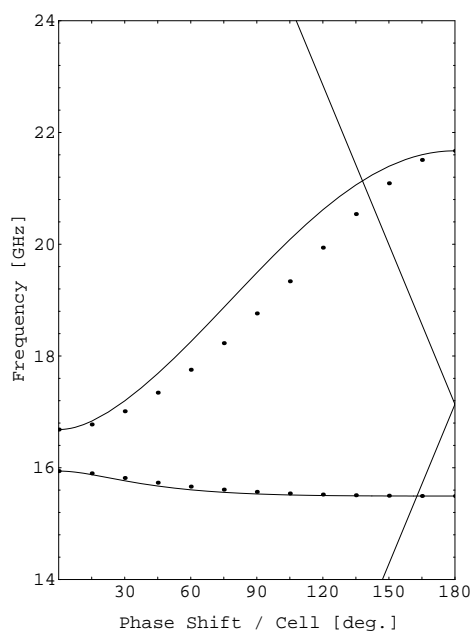


(c); 8 モード

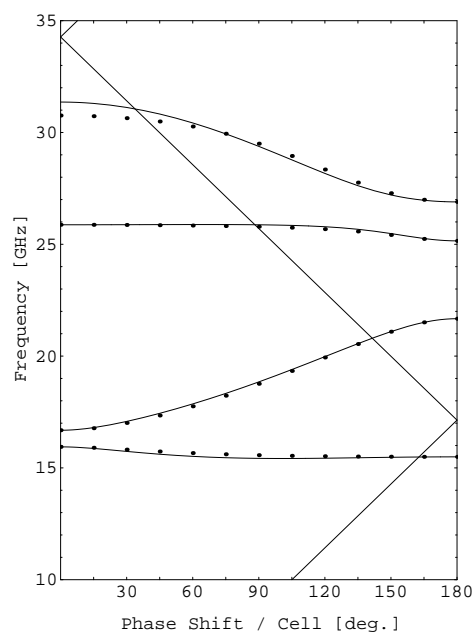


(d); 16 モード

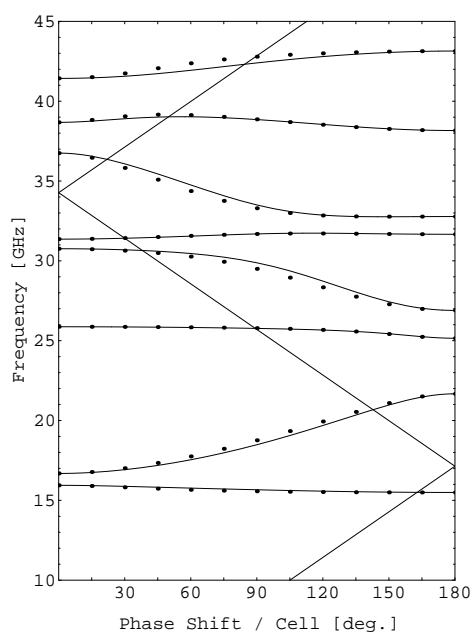
図 H.1: 面積分から行列を作りオープンモード展開したときの分散関係 ($a=3.0$ [mm])。黒丸はフィールドマッチング、実線はオープンモード展開で計算した結果である。それぞれの図は展開するモード数が異なる。



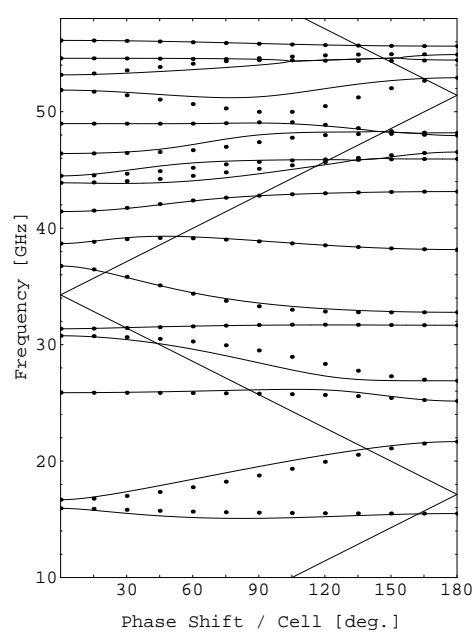
(a); 2 モード



(b); 4 モード

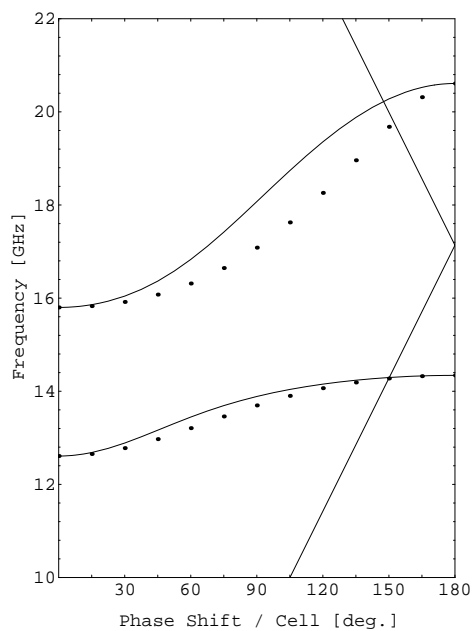


(c); 8 モード

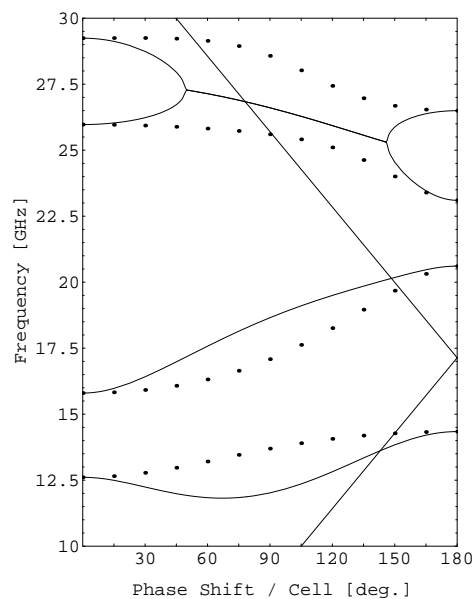


(d); 16 モード

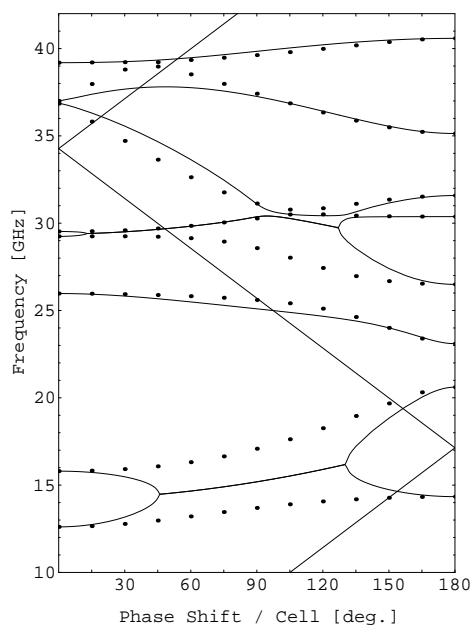
図 H.2: 面積分から行列を作りオープンモード展開したときの分散関係 ($a=4.5$ [mm])。黒丸はフィールドマッチング、実線はオープンモード展開で計算した結果である。それぞれの図は展開するモード数が異なる。図中、分散曲線が重なる部分は周波数が複素数になっており、その実数部を図示した。



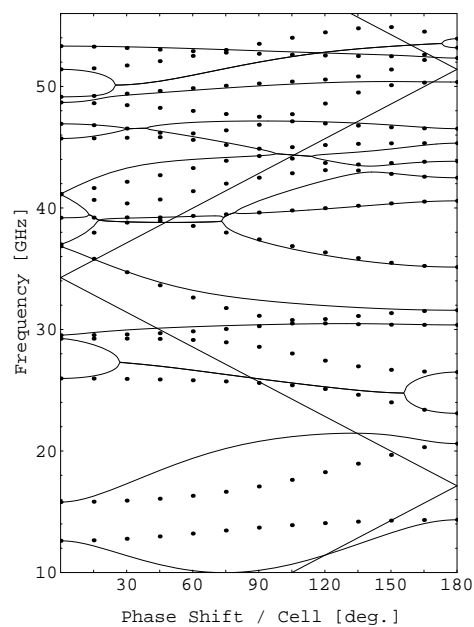
(a); 2 モード



(b); 4 モード



(c); 8 モード



(d); 16 モード

図 H.3: 面積分から行列を作りオープンモード展開したときの分散関係 ($a=6.0$ [mm])。黒丸はフィールドマッチング、実線はオープンモード展開で計算した結果である。それぞれの図は展開するモード数が異なる。図中、分散曲線が重なる部分は周波数が複素数になっており、その実数部を図示した。

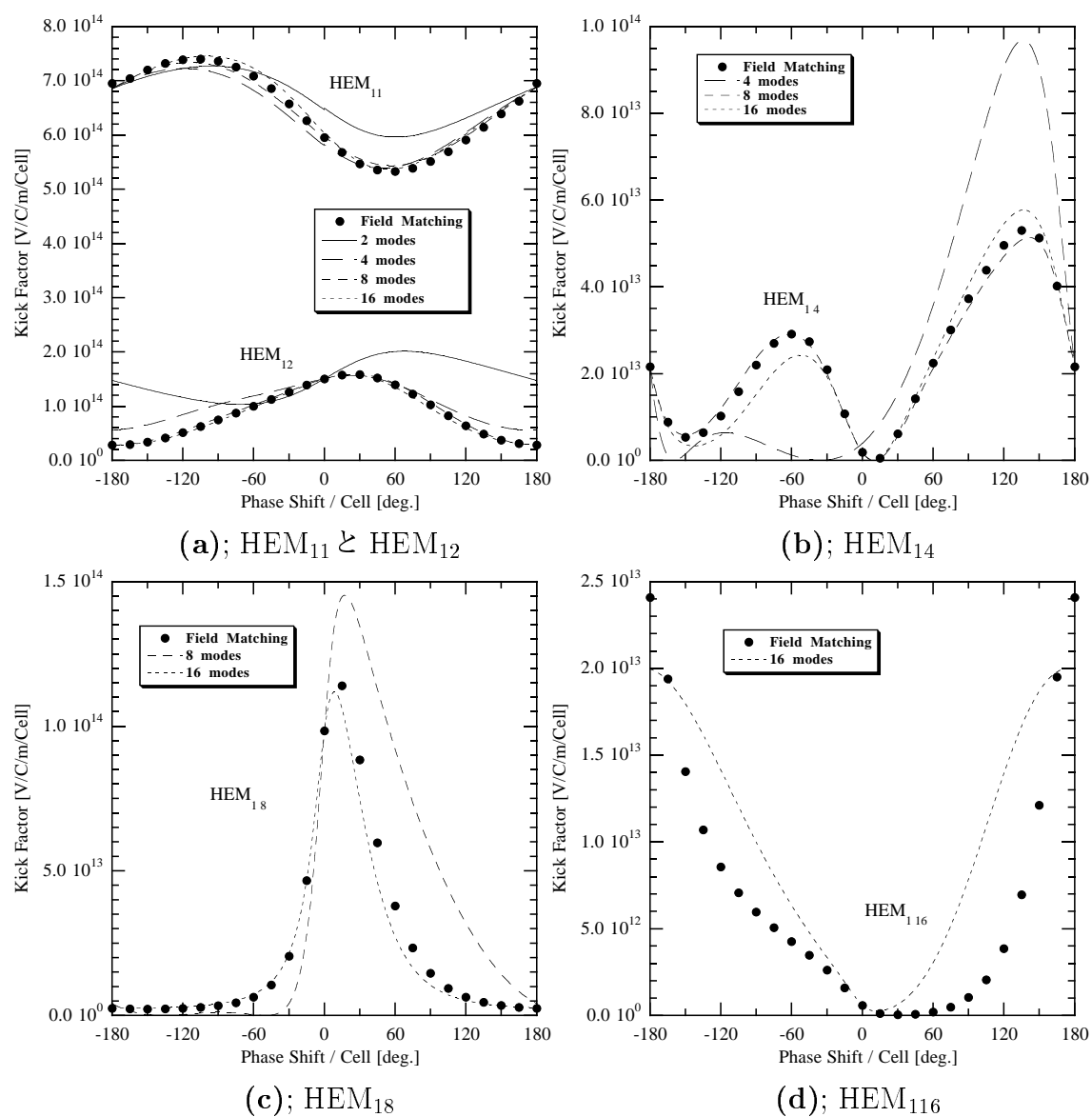


図 H.4: 面積分から行列を作りオープンモード展開したときのキック因子 ($a=3.0[\text{mm}]$)。黒丸はフィールドマッチング、実線や破線はオープンモード展開の結果を示す。

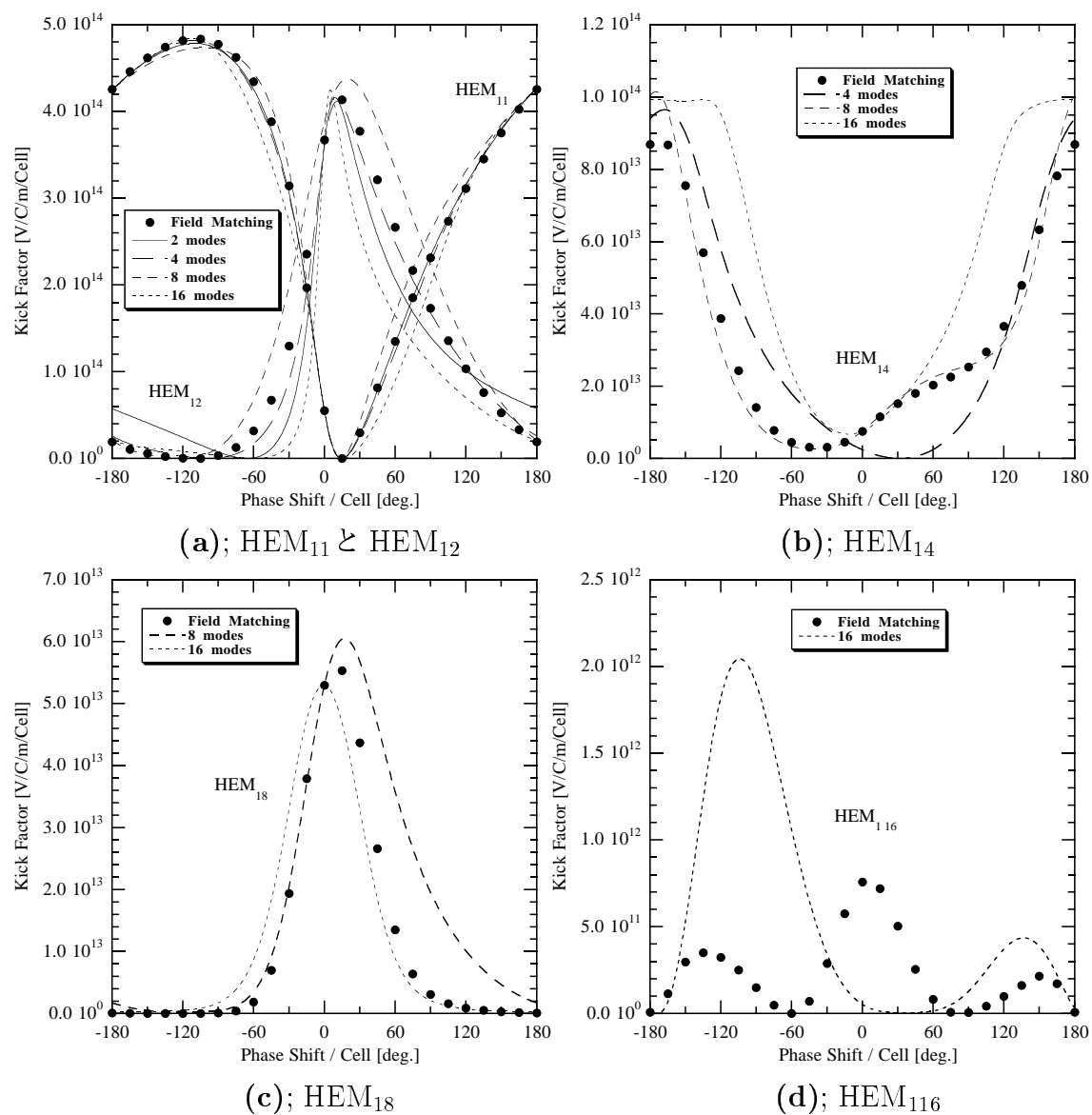


図 H.5: 面積分から行列を作りオープンモード展開したときのキック因子 ($a=4.5$ [mm])。黒丸はフィールドマッチング、実線や破線はオープンモード展開の結果を示す。

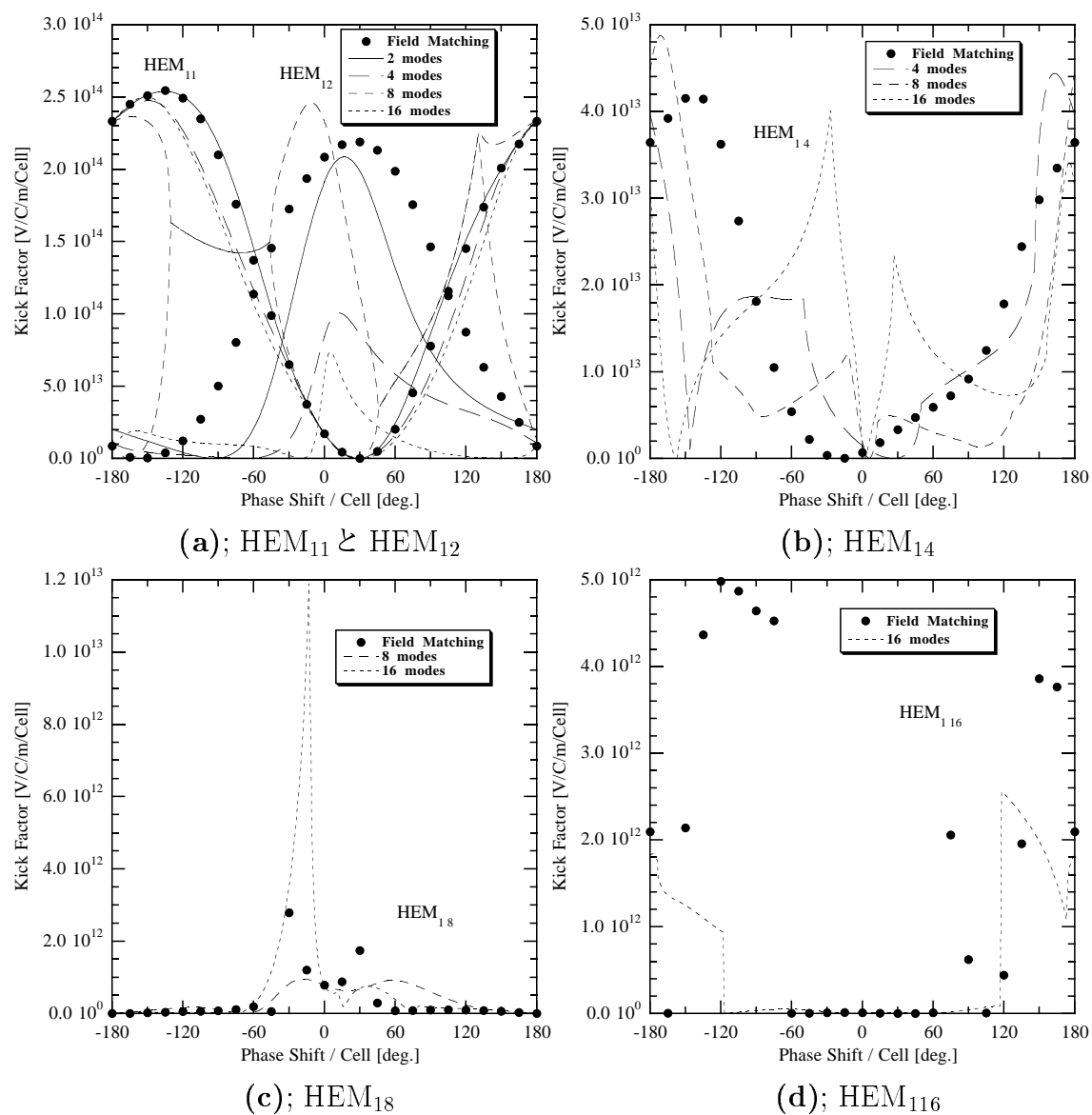


図 H.6: 面積分から行列を作りオープンモード展開したときのキック因子 ($a=6.0$ [mm])。黒丸はフィールドマッチング、実線や破線はオープンモード展開の結果を示す。

付録 I

行列 X_S の収束

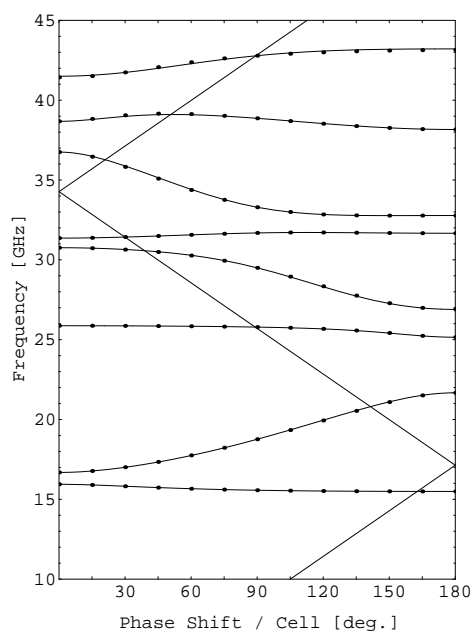
3章において、行列 X をエルミート化するために相似変換を行う必要がある。そこで、図 3.8 に示すアルゴリズムで行列の変換を行った。これが相似変換になっているかは確かではなく、これについての詳細は 3.3.3 節で述べるものとし、本付録では議論を行わない。更に、本付録の計算結果の検討についても 3.3.3 節で述べるものとする。

このアルゴリズムでは、変換後の行列は収束の速度を表す定数 C_1 に依存する。 C_1 が小さいと変換の速度は遅くこのアルゴリズムの計算の収束が遅いが、変換された行列と変換前の行列の差は小さい。一方、 C_1 を大きくすると 1 回の計算ステップで、元の行列は大きな変化を受ける。この場合、収束先が元の行列と大きく異なる可能性や収束しないで振動する可能性が生じる。これらのことから、収束係数 C_1 は小さい方が良い結果を示すと思われるが、実際計算時間等を考慮すると限界がある。

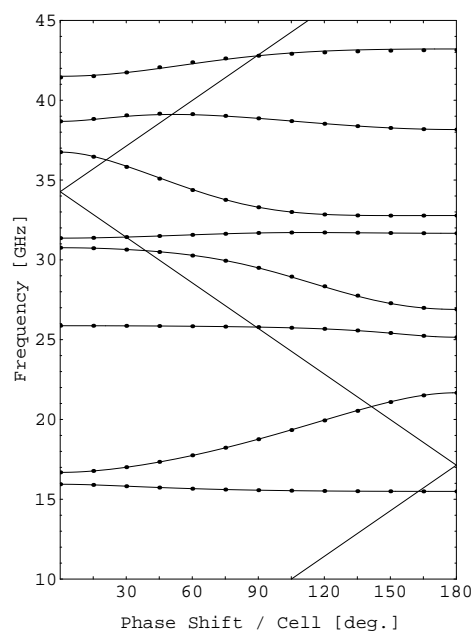
変換後の行列の違いは、オープンモード展開の分散関係とキック因子の違いに表れる。そこで、最適な収束係数 C_1 を求めるために、分散関係の収束係数 C_1 の依存性を計算しフィールドマッチングと比較した。図 I.1～図 I.3 に C_1 を 0.1～1.0 まで 0.1 間隔で変化させたときの分散関係を示す。

3.3.3 節の議論から、もし図 3.8 に示す行列の変換のアルゴリズムが相似変換であるならば、セル間位相差 $\phi = \pi/2$ の場合の周波数は最高次のモードを除いてフィールドマッチングの結果と一致する。また、 $\phi = 0, \pi$ の周波数は行列 X の計算方法からフィールドマッチングの結果と一致する。したがって、この行列の変換アルゴリズムが相似変換になっている場合、周波数の C_1 依存性は $\phi = \pi/4, 3\pi/4$ 付近に現れるものと思われる。その依存性を図 I.4 と図 I.5 に示す。

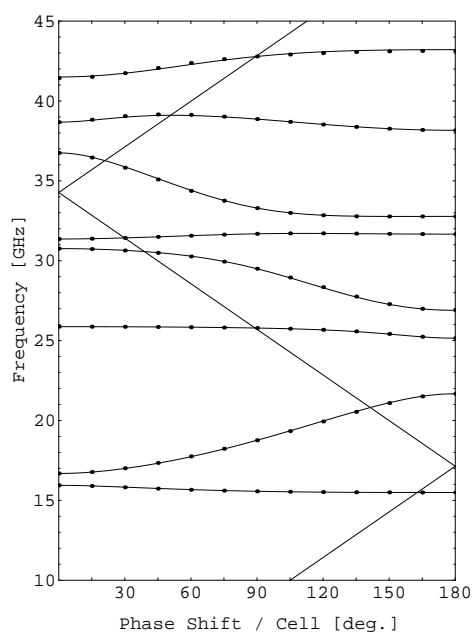
計算した加速セルの形状は $a = 4.5[\text{mm}]$, $t = 2.0[\text{mm}]$, $D = 8.7474[\text{mm}]$, $b = 10.77871[\text{mm}]$ であり、それを 8 個のオープンモードで展開した。計算結果を次ページ以降に示す。



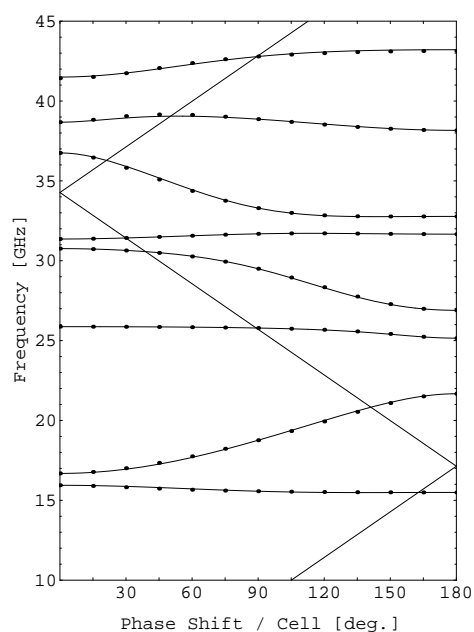
(a); $C_1=0.1$



(b); $C_1=0.2$

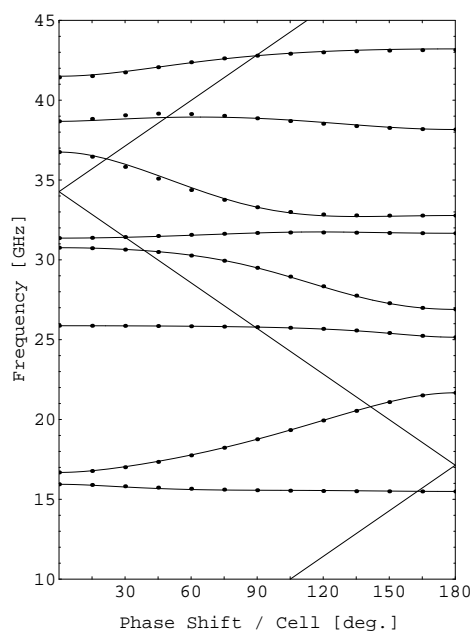


(c); $C_1=0.3$

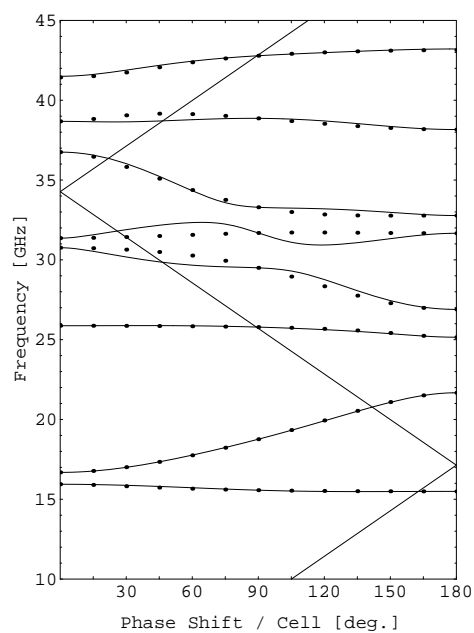


(d); $C_1=0.4$

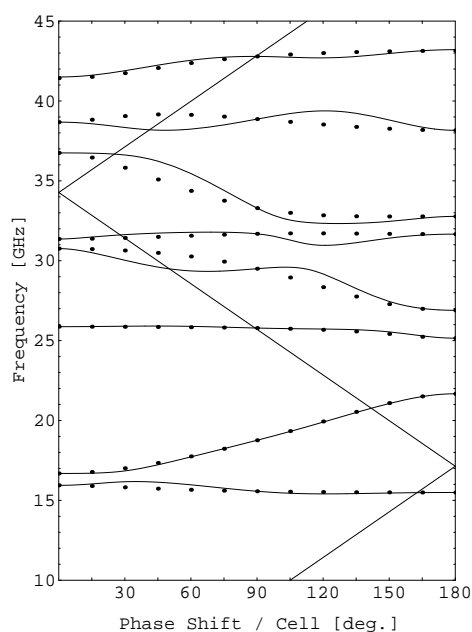
図 I.1: 収束係数による分散関係の変化 (係数が小さい場合)。黒丸はフィールドマッチング、実線はオープンモード展開で計算した結果である。



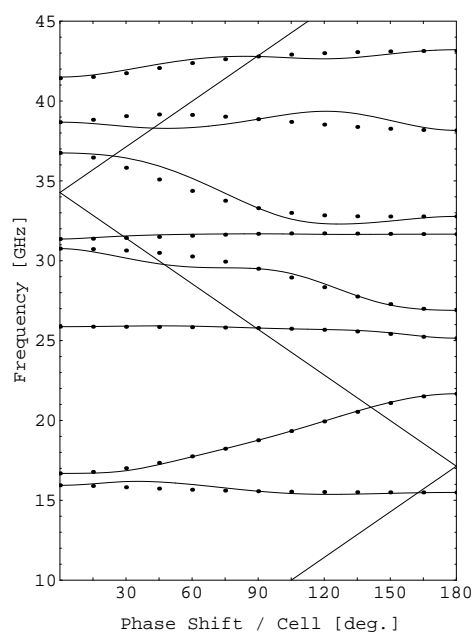
(a); $C_1=0.5$



(b); $C_1=0.6$



(c); $C_1=0.7$



(d); $C_1=0.8$

図 I.2: 収束係数による分散関係の変化 (係数が中間の場合)。黒丸はフィールドマッチング、実線はオープンモード展開で計算した結果である。

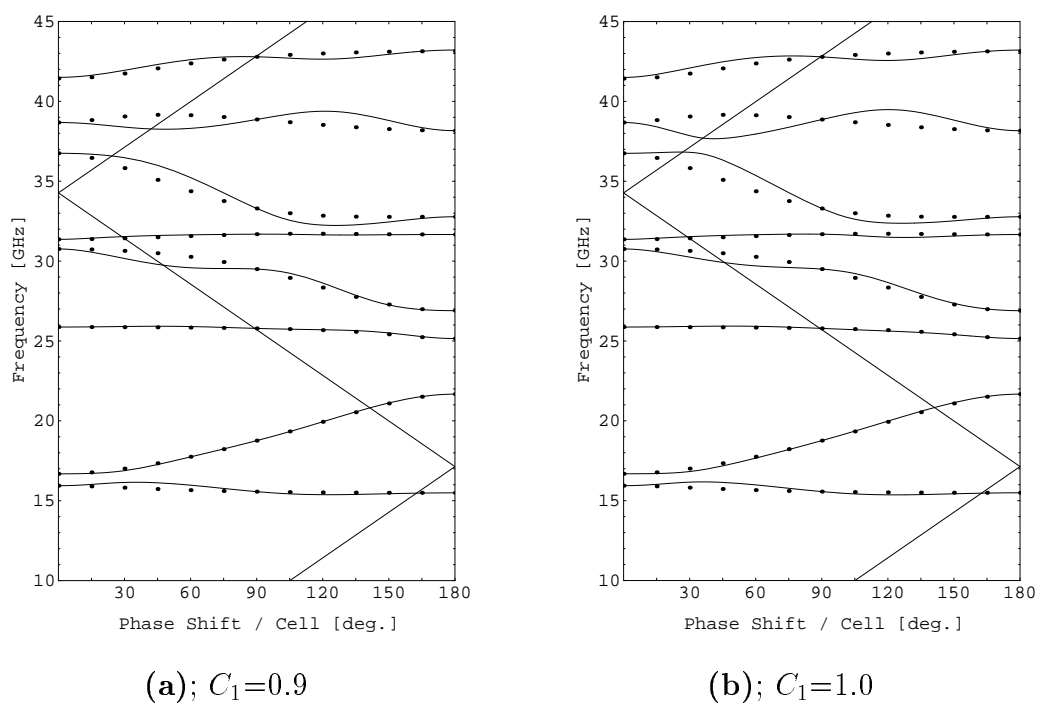
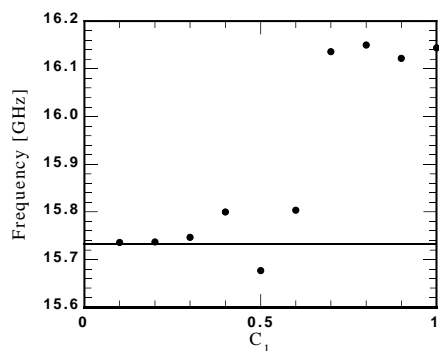
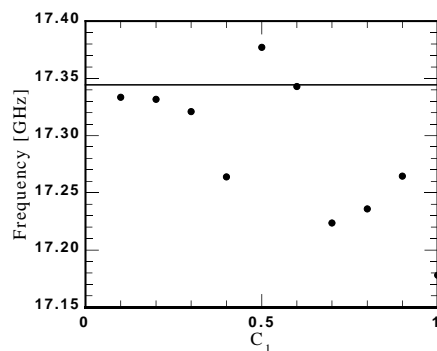


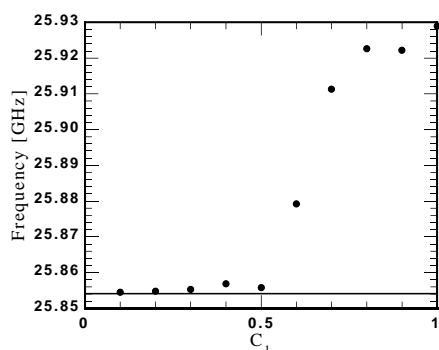
図 I.3: 収束係数による分散関係の変化 (係数が大きい場合)。黒丸はフィールドマッチング、実線はオープンモード展開で計算した結果である。



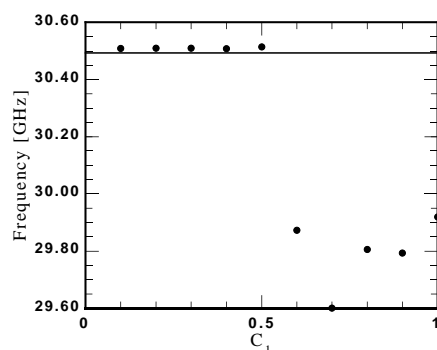
(a); HEM₁₁



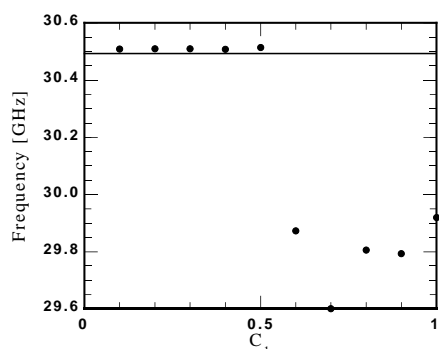
(b); HEM₁₂



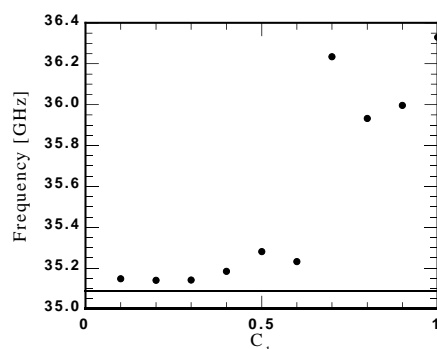
(c); HEM₁₃



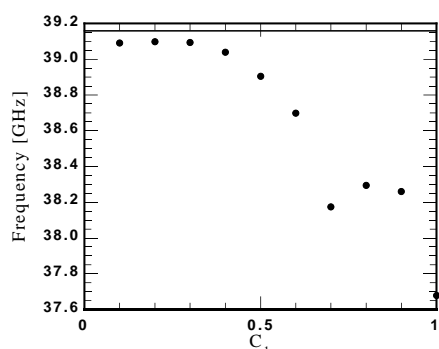
(d); HEM₁₄



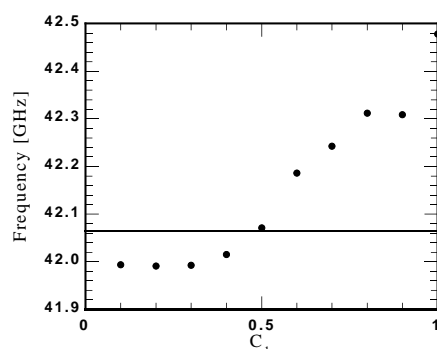
(e); HEM₁₅



(f); HEM₁₆

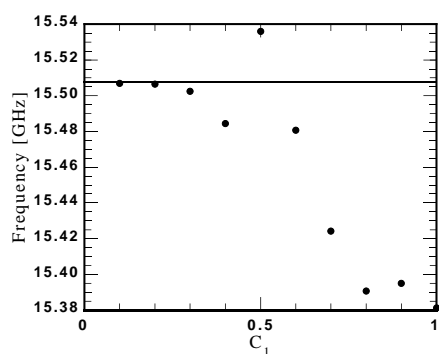


(g); HEM₁₇

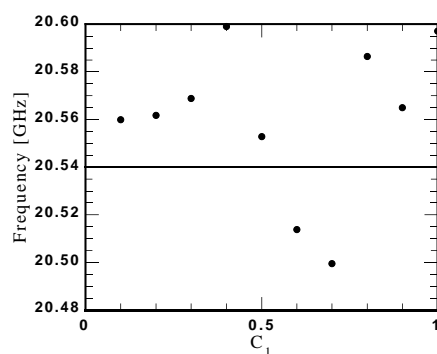


(h); HEM₁₈

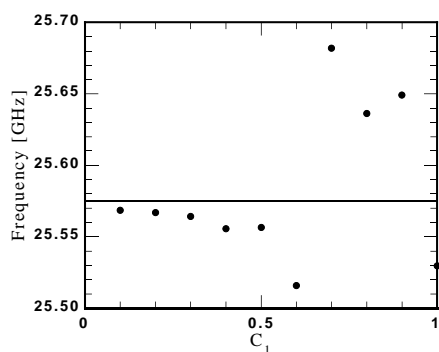
図 I.4: 収束係数による周波数変化 ($\phi = \pi/4$ [rad.]). 実線はフィールドマッチング、黒丸はオープンモード展開を示す。



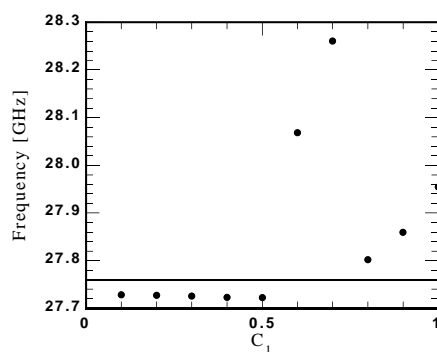
(a); HEM₁₁



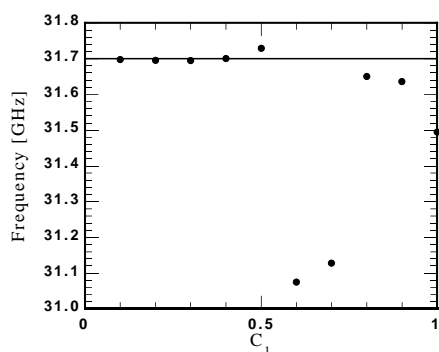
(b); HEM₁₂



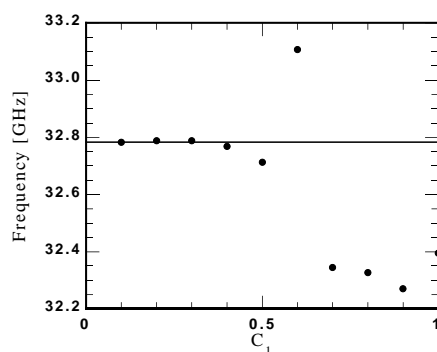
(c); HEM₁₃



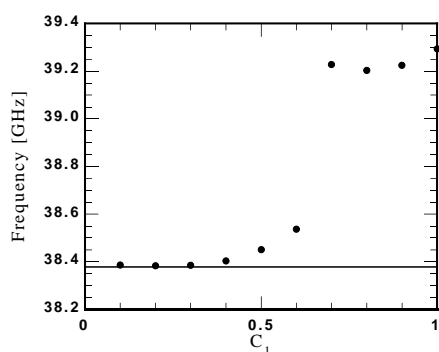
(d); HEM₁₄



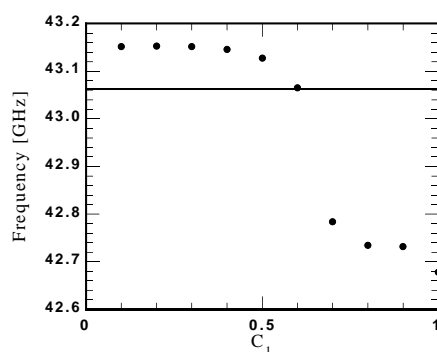
(e); HEM₁₅



(f); HEM₁₆



(g); HEM₁₇



(h); HEM₁₈

図 I.5: 収束係数による周波数変化 ($\phi = 3\pi/4$ [rad.]). 実線はフィールドマッチング、黒丸はオープンモード展開を示す。

付録 J

エルミート行列 X を用いた場合

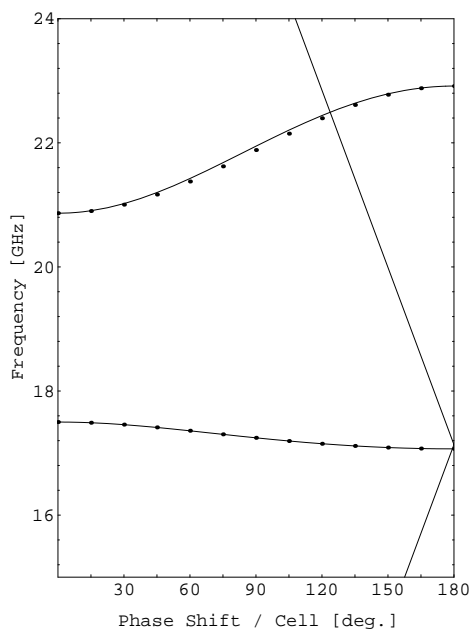
本付録では、3.3.3節に示した方法、すなわち行列 X を $\phi = 0, \pi/2, \pi$ のモードの固有値と固有ベクトルからエルミート性等をもつように構成してオープンモード展開する方法とフィールドマッチングとの比較を行う。計算方法および結果についての考察は、3.3.3節に述べる。

ディスク孔 $a=3.0, 4.5, 6.0$ [mm] の3種類の周期構造の分散関係とキック因子について、両者の比較を行った。計算した加速セルの詳細形状と計算結果の図番号を表 J.1 に示す。また、展開するオープンモードの個数は 2, 4, 8, 16 とした。

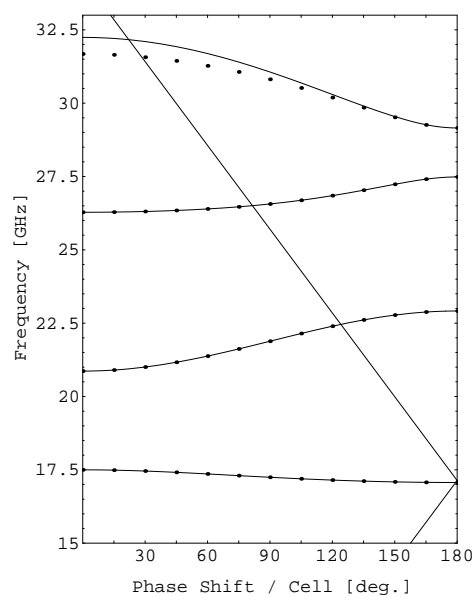
表 J.1: 加速セルの形状と計算結果の図番号

ディスク孔 a [mm]	セル径 b [mm]	セル長 D [mm]	ディスク厚 t [mm]	図番号	
				分散関係	キック因子
3.0	10.29130	8.7474	2.0	図 J.1	図 J.4
4.5	10.77871	8.7474	2.0	図 J.2	図 J.5
6.0	11.51258	8.7474	2.0	図 J.3	図 J.6

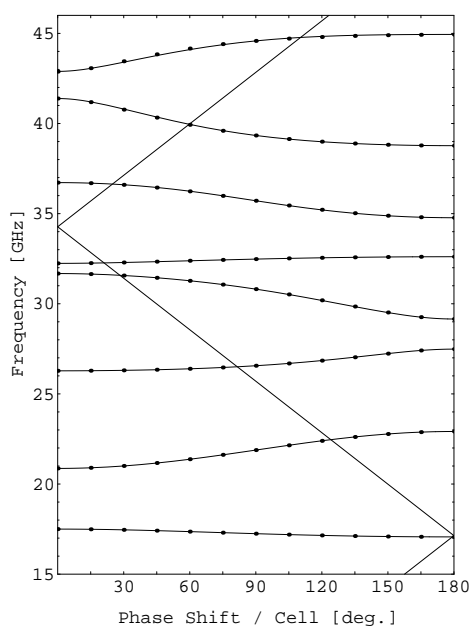
; 4 モード



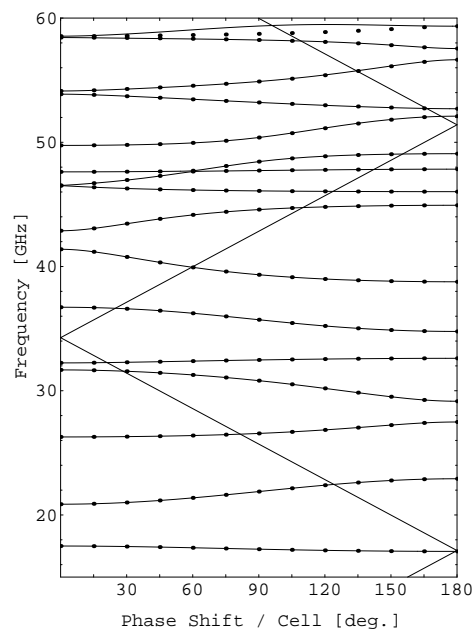
(a); 2 モード



(b); 4 モード

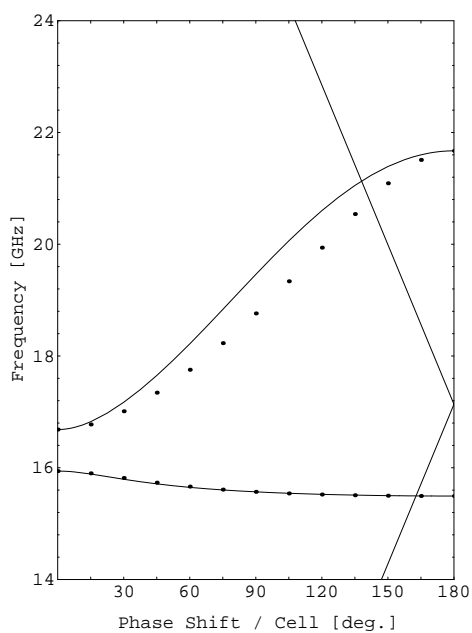


(c); 8 モード

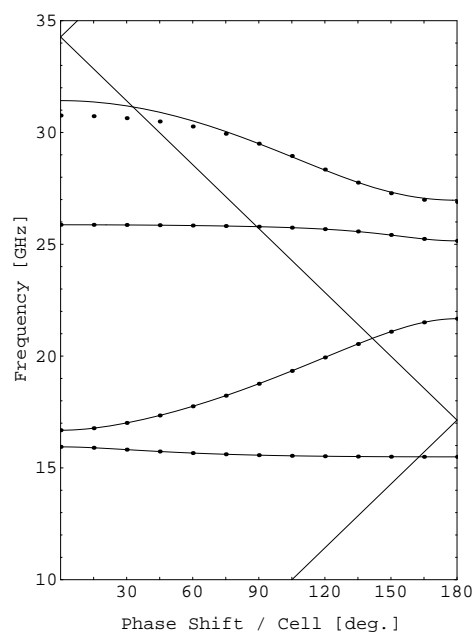


(d); 16 モード

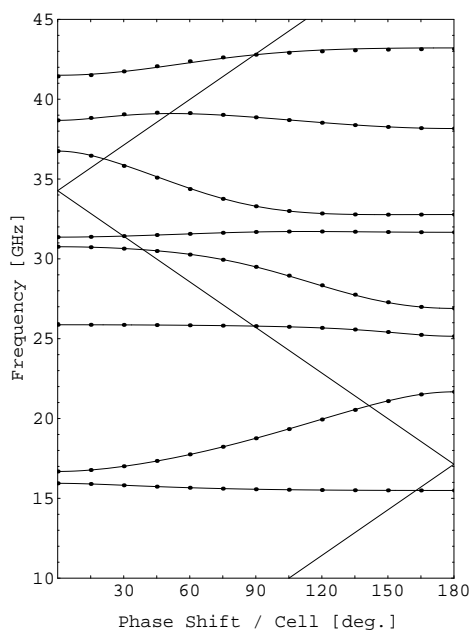
図 J.1: X をエルミート行列にしたときの分散関係 ($a=3.0$ [mm])。黒丸はフィールドマッチング、実線はオープンモード展開で計算した結果である。それぞれの図は展開するモード数が異なる。



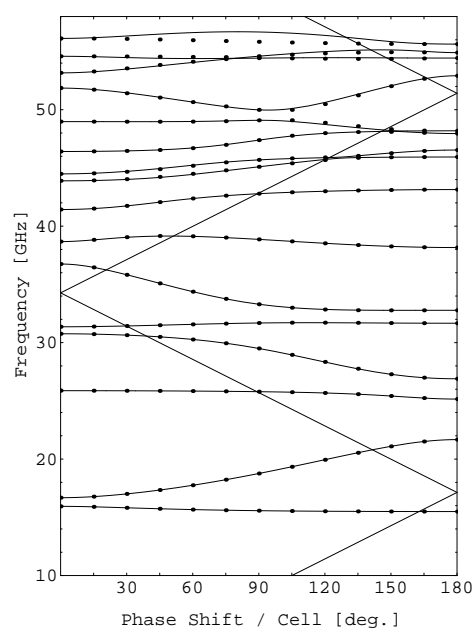
(a); 2 モード



(b); 4 モード

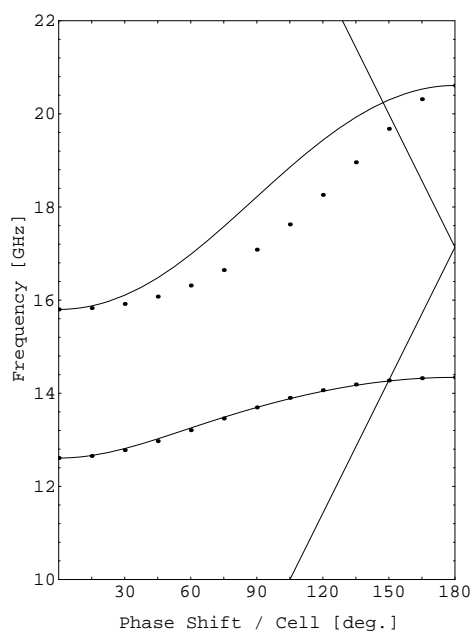


(c); 8 モード

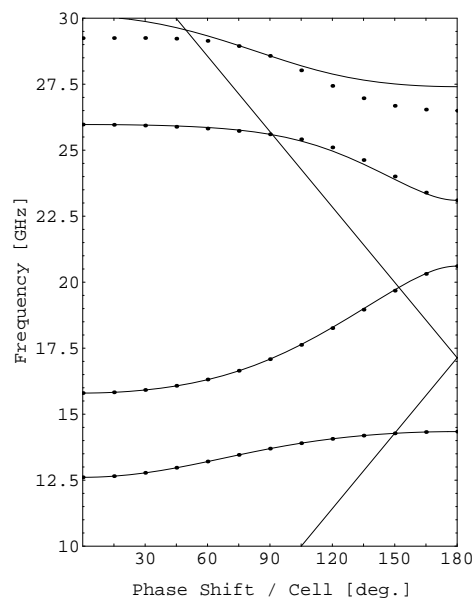


(d); 16 モード

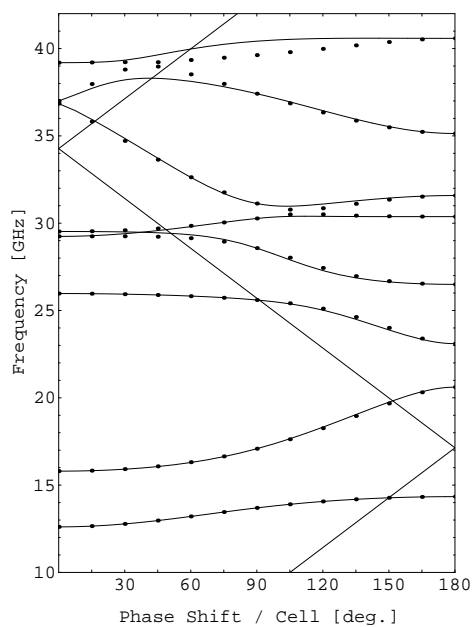
図 J.2: X をエルミート行列にしたときの分散関係 ($a=4.5$ [mm])。黒丸はフィールドマッチング、実線はオープンモード展開で計算した結果である。それぞれの図は展開するモード数が異なる。



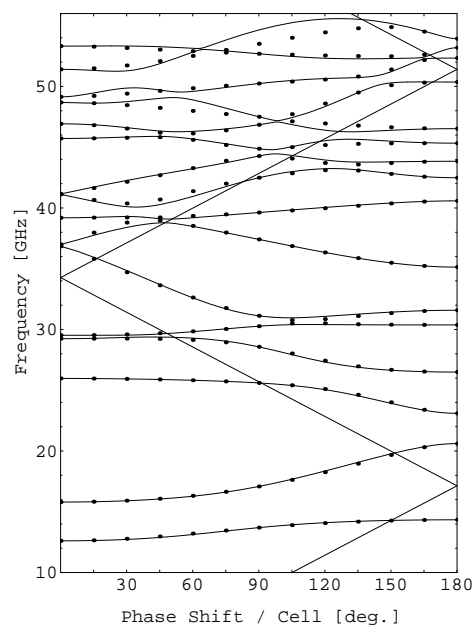
(a); 2 モード



(b); 4 モード



(c); 8 モード



(d); 16 モード

図 J.3: \mathbf{X} をエルミート行列にしたときの分散関係 ($a=6.0\text{mm}$)。黒丸はフィールドマッチング、実線はオープンモード展開で計算した結果である。それぞれの図は展開するモード数が異なる。

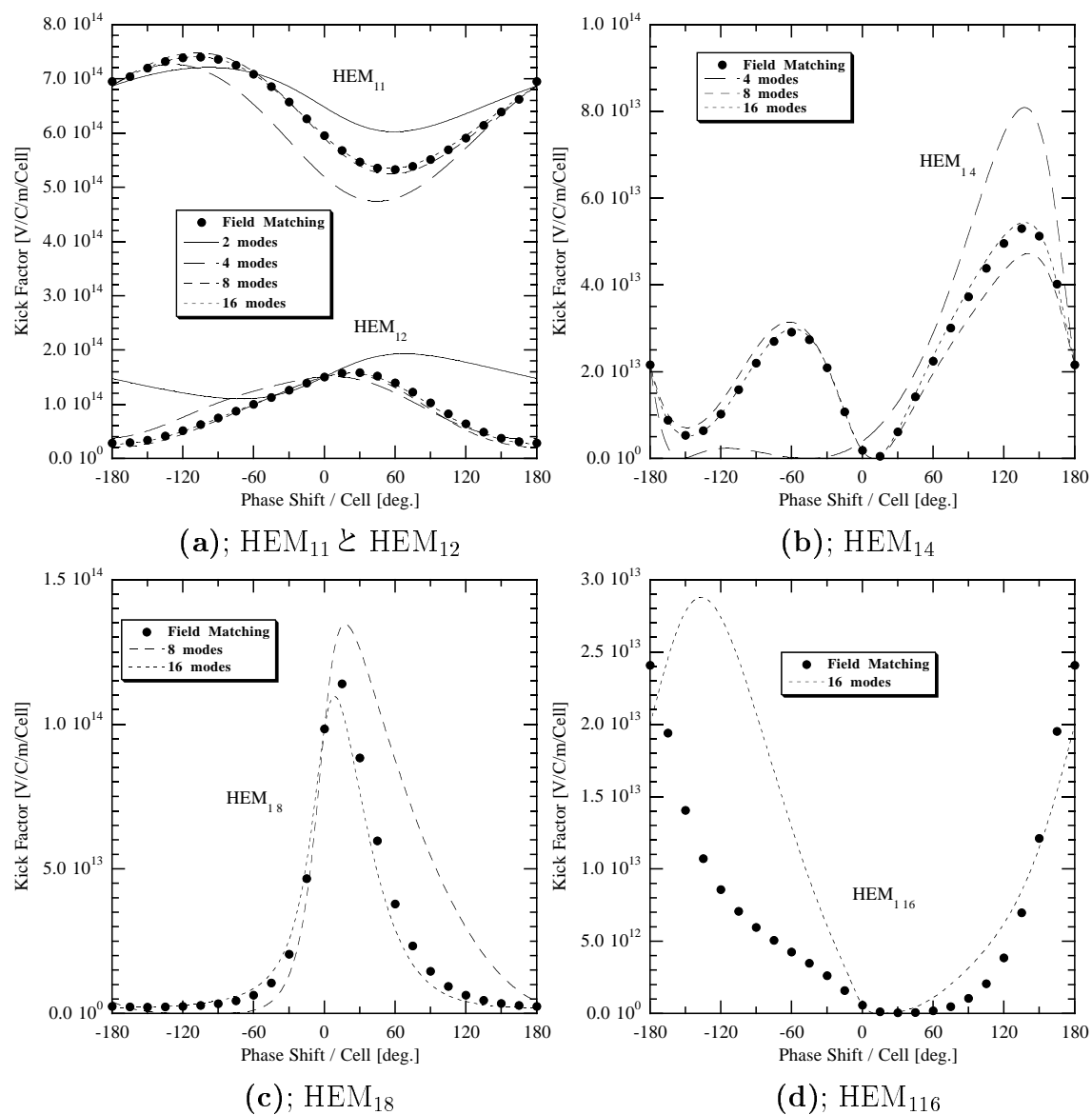


図 J.4: \mathbf{X} をエルミート行列にしたときのキック因子 ($a=3.0$ [mm])。黒丸はフィールドマッチング、実線や破線はオープンモード展開の結果を示す。

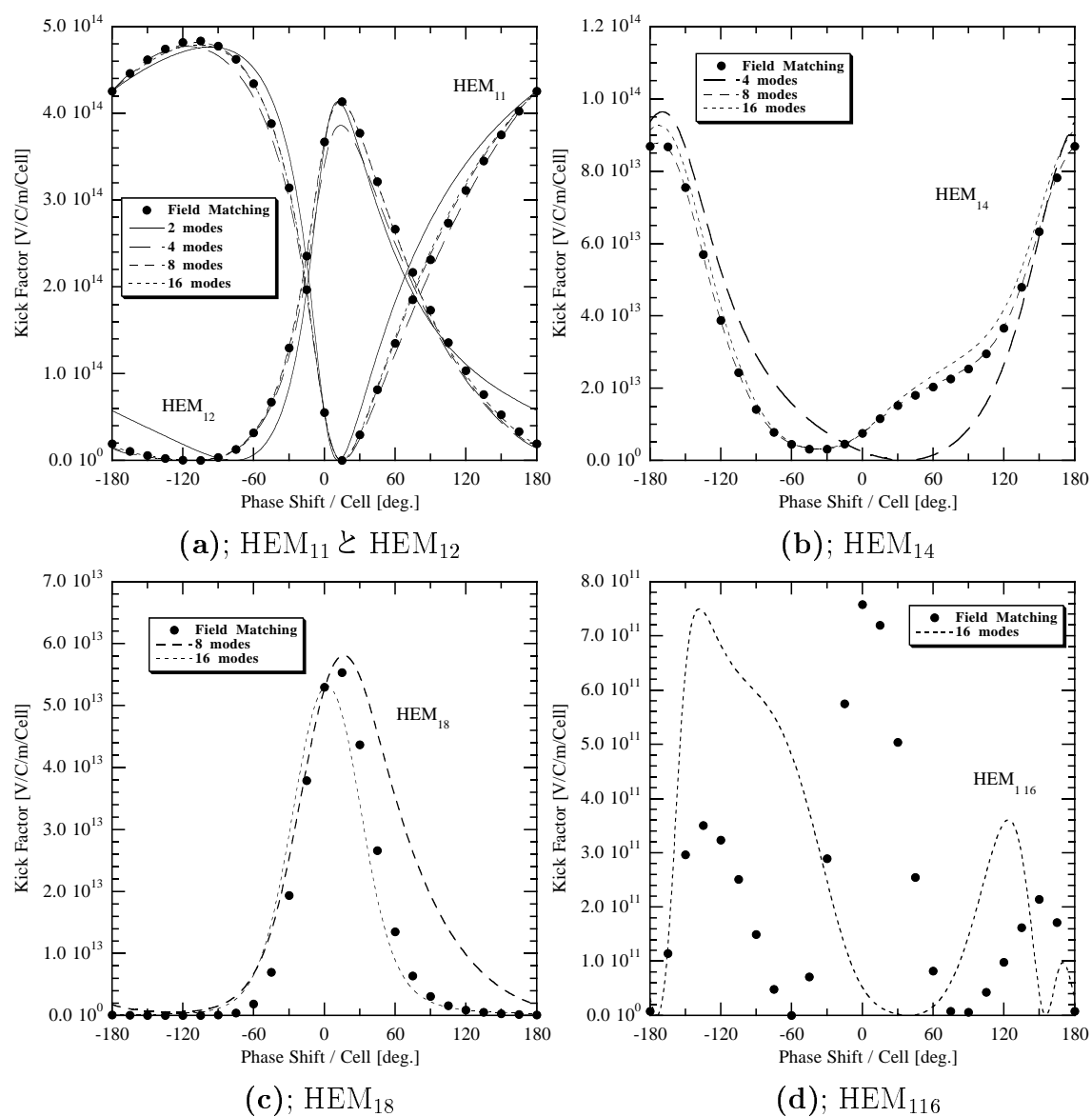


図 J.5: X をエルミート行列にしたときのキック因子 ($a=4.5$ [mm])。黒丸はフィールドマッチング、実線や破線はオープンモード展開の結果を示す。

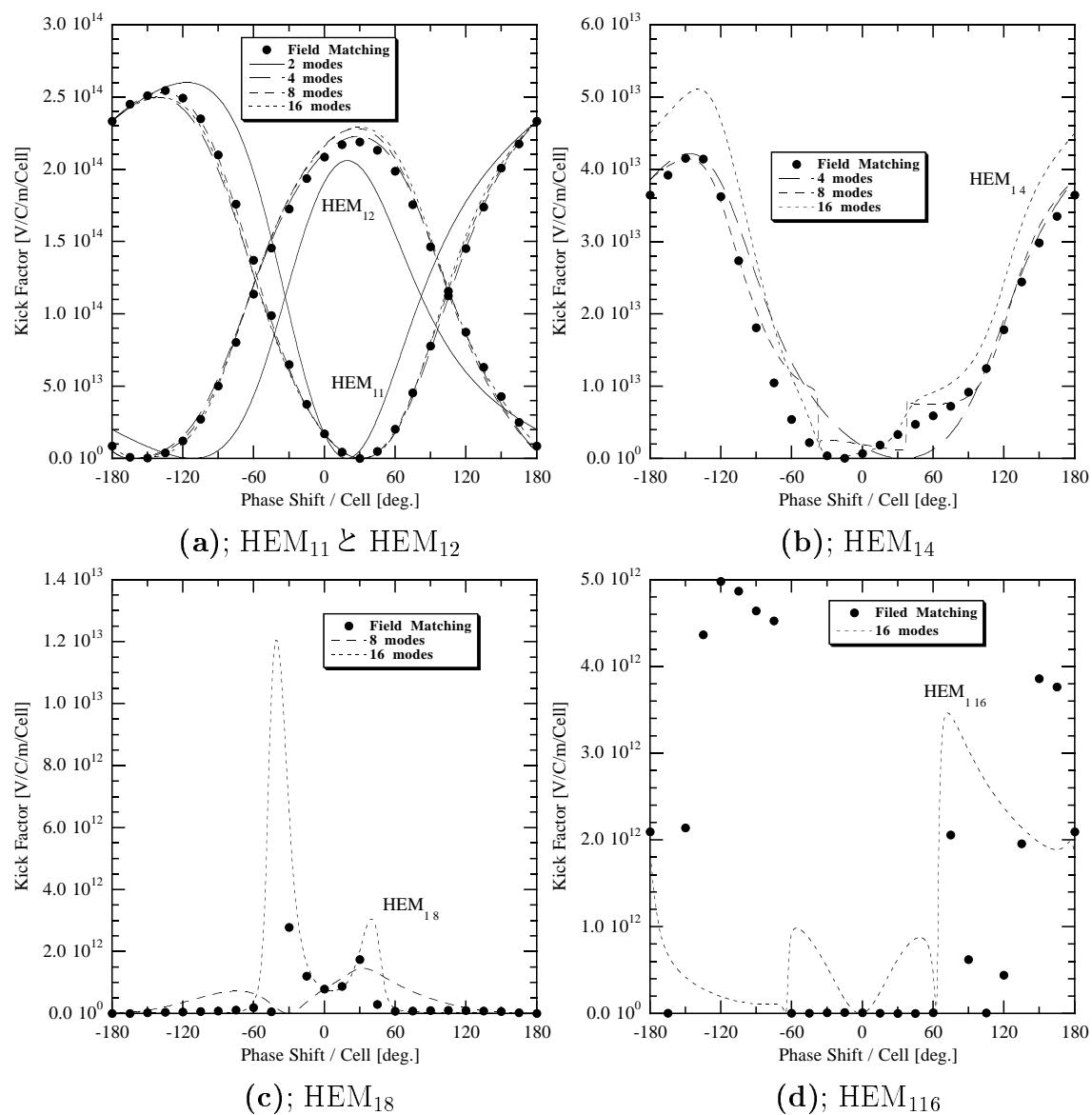


図 J.6: \mathbf{X} をエルミート行列にしたときのキック因子 ($a=6.0$ [mm])。黒丸はフィールドマッチング、実線や破線はオープンモード展開の結果を示す。

参考文献

- [1] P. B. Wilson, "LINEAR ACCELERATORS FOR TeV COLLIDERS", SLAC-PUB-3674 (Rev.), October 1985.
- [2] JLC Group, JLC-I, KEK Report 92-16, 1992.
- [3] 物理学事典, 培風館, 1986.
- [4] V. Barakin *et al.*, Proceedings of the 12th International Conference on High Energy Accelerator, 1983.
- [5] A. Wu Chao, "PHYSICS OF COLLECTIVE BEAM INSTABILITIES IN HIGH ENERGY ACCELERATORS", JOHN WILEY & SONS, INC., 1993.
- [6] T. Higo *et al.*, "X-BAND ACCELERATING STRUCTURE FOR JAPAN LINEAR COLLIDER", Proceedings of the Linear Accelerator Conference, Albuquerque, 1990.
- [7] T. Higo, "Accelerating structure fo main linac of JLC", Proceedings of the Second Workshop on Japan Linear Collider, 1990.
- [8] M. Takao *et al.*, "Evaluation of Wake Fields of Disk Loaded Structure FOR JAPAN LINEAR COLLIDER", KEK Report 91-4, July, 1991.
- [9] 竹田誠之, "リニアックの基礎 (OHO'90 高エネルギー加速器セミナー)", 1990.
- [10] 谷内努, "加速空洞における周方向スロット型減衰構造の研究", 博士論文, 1994.
- [11] K. L. F. Bane *et al.*, "WAKE FIELD AND WAKE FIELD ACCELERATION", SLAC-PUB-3528, December 1984.
- [12] T. Weiland *et al.*, "Wake field and Impeadance", DESY M-91-06, May 1991.
- [13] T. Shintake, "The Choke Mode Cavity", *Jpn. J. Appl. Phys.* **31**, L1567, 1992. Also KEK Preprint 92-51, July 1992.

- [14] H. Deruter *et al.*, "DAMPED AND DETUNED ACCELERATOR STRUCTURES", Proceedings of the Linear Accelerator Conference, Albuquerque, 1990.
Also SLAC-PUB-5322, September 1990.
- [15] T. Weiland, Nucl. Instrum. Methods 212.
- [16] Y. H. Chin, "Advanced and Applications of ABCI", LBL/University of California Report LBL-33268/UC-414,1993.
- [17] T. Weiland, Nucl. Instrum. Methods 216.
- [18] R. Klatt *et al.*, "MAFIA-A Three Dimensional Electromagnetic System for Magnets, RF Structure and Transient Wake-Field Calculations", Proceedings of the 1986 Linear Accelerator Conference, pp.276-278, 1986.
- [19] E. Keil, Nucl. Instrum. Methods 216, 419, 1972.
- [20] K. L. F. Bane and B. Zotter, Proceedings of the XI-th International Conference on High Energy Accelerator, Geneva, 1980.
- [21] S. A. Heifets *et al.*, "LONGITUDINAL ELECTROMAGNETIC FIELDS IN AN APERIODIC STRUCTURE", SLAC-PUB-5907, September 1992.
- [22] S. A. Kheifets *et al.*, "TRANSVERSE ELECTROMAGNETIC FIELDS IN A DETUNED X-BAND ACCELERATING STRUCTURE", draft for submission (private communication).
- [23] URSULA VAN RIENEN, "HIGHER ORDER MODE ANALYSIS OF TAPERED DISC-LOADED WAVEGUIDES USING THE MODE MATCHING TECHNIQUE", Particle Accelerators, Vol. 41, pp. 173-201, 1993.
- [24] K. L. F. Bane *et al.*, "THE COUPLED DIPOLE MODES OF THE NLC ACCELERATOR STRUCTURE", SLAC-PUB-5766, March 1992.
- [25] Karl L. F. Bane *et al.*, "THE TRANSVERSE WAKE FIELD OF A DETUNED X-BAND ACCELERATOR STRUCTURE", SLAC-PUB-5783, March 1992.
- [26] H. G. Beyer *et al.*, "ATTENUATION OF TRANSVERSE MODE BY VARIABLE CELL GEOMETRIES IN TRAVELLING WAVE TUBES", HEACC'92, HAMBURG, July 1992.

- [27] M. Yamamoto *et al.*, "Simulation of Long Range Wake Field in a Detuned Structure based on Equivalent Circuit Model",
Proceedings of the 8th Symposium on Accelerator Science and Technology, Wako, 1991.
Also KEK Preprint 91-153 November 1991.
- [28] M. Yamamoto *et al.*, "Realistic Design of Detuned Structure for JLC",
Proceedings of the 16th International Linac Conference, Ottawa, 1992.
Also KEK Preprint 92-130 September 1992.
- [29] D. E. Nagle *et al.*, "Coupled Resonator Model for Standing Wave Accelerator Tanks",
The Review of Scientific Instruments, Vol.38, No.11, 1967, pp1583.
- [30] M. Yamamoto *et al.*, "Evaluation of the Wake Field in Detuned Structure",
Proceedings of the 9th Symposium on Accelerator Science and Technology, Tsukuba,
1993.
Also KEK Preprint 93-101 August 1993.
- [31] Robert M. Bevensee, "Periodic Electromagnetic and Quantum System",
ANNALS OF PHYSICS, 12, pp222-263, 1961.
- [32] Robert M. Bevensee, "Electromagnetic Slow Wave Systems",
JOHN WILEY & SONS, INC., 1964.
- [33] K. Halback and R. F. Holsinger, "SUPERFISH-A Computer Program for Evaluation
of RF Cavities with Cylindrical Symmetry",
Particle Accelerators, Vol. 7, pp. 213, 1976.
- [34] B. Zotter and K. Bane, "TRANSVERSE RESONANCES OF PERIODICALLY
WIDENED CYLINDRICAL TUBES WITH CIRCULAR CROSS SECTION",
PEP-NOTE 308, September 1979.
- [35] Burton Richter, "From the SLAC Linear Collider to the Next Linear Collider: A
Status Report and Road Map",
SLAC-PUB-5736, February, 1992.
- [36] K. A. Thompson *et al.*, "DESIGN AND SIMULATION OF ACCELERATING
STRUCTURES FOR FUTURE LINEAR COLLIDERS",
SLAC-PUB-6032, November, 1993.
- [37] Kwok Ko, private communication.
- [38] L. C. Maier, Jr. and J. C. Slater, "Field Strength Measurements in Resonant Cavities",
J. Appl. Phys., vol 23, pp68, 1952 January.

- [39] Y. Yamazaki *et al.*, "MEASUREMENT OF THE LONGITUDINAL AND TRANSVERSE COUPLING IMPEDANCES OF THE HIGHER-ORDER MODES OF THE RE-ENTRANT ACCELERATING CAVITY", KEK 80-8.
- [40] W. K. H. Panofsky and W. A. Wenzel, "Some Consideration Concerning the Transverse Deflection of Charged Particle in Radio-Frequency Fields", Rev. Sci. Instrum. 27, pp967, 1956.