論理式、論理回路、MIL 記号

山本昌志*

2003 年 12 月 19 日

本日の講義の学習内容と到達目標は、以下のとおりです。

学習内容 論理式を MIL 記号で表すことを学習する。

到達目標 どんな論理式でも、MIL 記号に変換できるようになる。

1 はじめに

1.1 身近にある論理回路

現代社会では、コンピューターをはじめ数多くのデジタル回路が使われています。一般家電においてさえ、デジタル回路が使われていないものは無いと言えます。デジタル回路は、演算をする回路や記憶する回路から構成されています。これらの演算や記憶[1] の回路は、論理素子というものを組み合わせて作ることができます。論理素子を組み合わせて作られた回路を論理回路と言います。これからは、その論理素子を組み合わせた回路の学習をします。

実際の論理素子は、図 1 のような外観の IC の形で販売されています。その中身の回路については、いろいろな種類がありその例を図 2 に示します。近頃の電子機器では、このような論理素子をそのまま使うことはまれですが、皆さんも見たことがあるでしょう。これらの IC は 1 個あたり数十円で売られています。実際の工業製品では、それよりもずっと安く仕入れて製品に組み込んでいます。

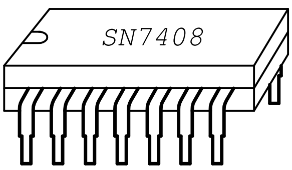

図 1: 論理回路用 IC

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

[1] 論理回路を組み合わせた記憶素子は高価なので、一般にはコンデンサーに電荷を蓄える記憶素子が使われます。

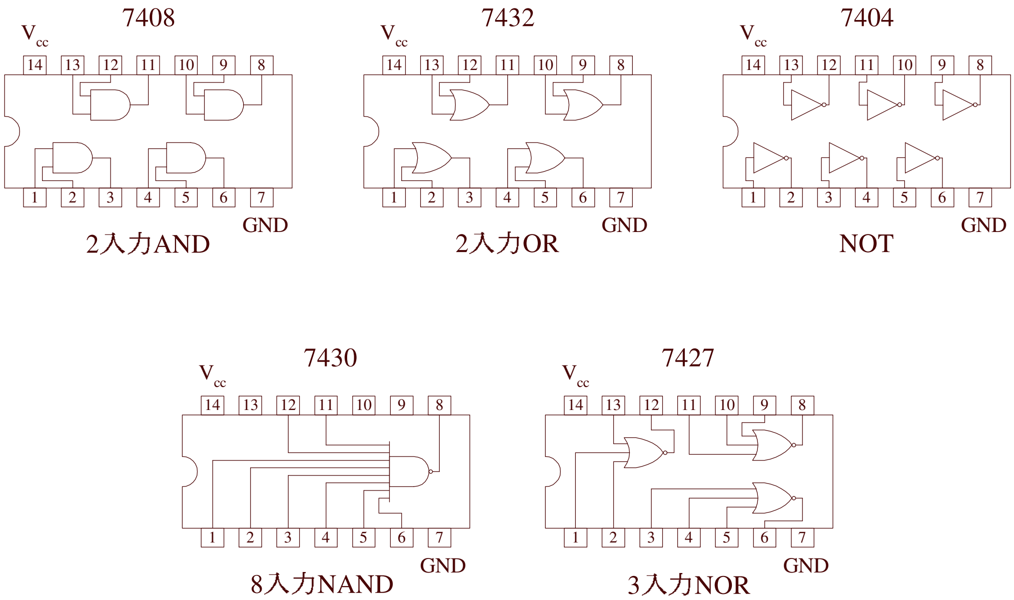

図 2: 論理回路用の IC の例。V_{CC} には電力+5[V] を供給し、GND は 0[V] のグランドに接続する。

1.2 組み合わせ回路と順序回路、そしてコンピューター

最も基本的な論理素子は、AND と OR、NOT です。それらを表す MIL 論理記号を図 3〜5 に、その動作を表 2〜3 に示します。この 3 つの回路を組み合わせることにより、どんな演算も可能な回路ができます。お望みの入出力関係の回路ができます。非常に驚きですが、これは今まで学習した通りです。どんな真理値表でも論理式で表せたのですから。このように、入力に対して、そのまま 1 対 1 で応答する回路を組み合わせ回路と言います。残りの授業ではこの組み合わせ回路について学習します。

一方、そのとき入力のみで応答が決まらず、以前の結果も合わせて演算を行い出力が決まる回路を順序回路といいます。この順序回路は、記憶する回路が組み込まれています。このようなものをフリップ- フロップ回路といいます。この記憶する回路が、AND や OR、NOT の素子でできます。これも驚くべきことです。順序回路の学習が完了して、時間があればこれについても講義を行います。

どんな演算もできて、記憶すらできるのですから、コンピューターが可能ということです。この 3 個の素子、AND と OR と NOT でコンピューターが作れるのです。驚きでしょう。コンピューターは非常に複雑な機械ですが、元をただせば非常に単純な回路の組み合わせです。インテル社の最新の CPU である Pentium は約 7700 万個のトランジスタが使われています。論理素子は、数個のトランジスタで可能ですから、その CPU の中の論理素子の数は大変なものです。

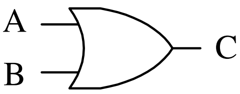

図 3: OR 素子

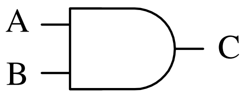

図 4: AND 素子

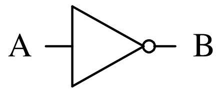

図 5: NOT 素子

表 1: OR 回路の動作

入力 [V]		出力 [V]
A	B	C
0	0	0
0	5	5
5	0	5
5	5	5

表 2: AND 回路の動作

入力 [V]		出力 [V]
A	B	C
0	0	0
0	5	0
5	0	0
5	5	5

表 3: NOT 回路の動作

入力 [V]	出力 [V]
A	B
0	5
5	0

2　MIL 記号

2.1　MIL 記号の真理値表

論理素子 (ゲート素子) を表すための記号として、一般には MIL 記号が使われます。MIL 記号とその真理値表を以下に示します。

○印がつくと否定を表すことに注意をしてください。入力に丸印がついた場合、その否定がゲート入力になります。

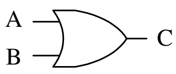

図 6: OR 素子

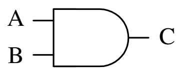

図 7: AND 素子

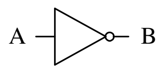

図 8: NOT 素子

表 4: OR の真理値表

A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表 5: AND の真理値表

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表 6: NOT の真理値表

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

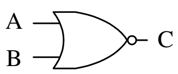

図 9: NOR 素子

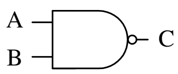

図 10: NAND 素子

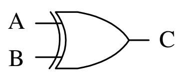

図 11: XOR 素子

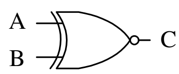

図 12: 一致素子

表 7: NOR の真理値表

A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

表 8: NAND の真理値表

A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

表 9: XOR の真理値表

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

表 10: 一致の真理値表

A	B	$A \odot B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3　論理回路と論理式

以下の論理式を実現する回路を考えます。

$$Y = A \cdot \bar{B} + B + A \cdot C \tag{1}$$

この論理式をそのまま MIL 記号で書くと、図 13 に示す回路になります。実際、論理素子を買ってきて、この MIL 記号の通りに配線をすれば、この論理式の通りに回路は動作します。

この論理式は、以下のように簡単に出来ます。

$$\begin{aligned}
Y &= A \cdot \bar{B} + B + A \cdot C \\
&= (B + A) \cdot (B + \bar{B}) + A \cdot C && \text{分配法則より} \\
&= (B + A) \cdot (1) + A \cdot C && \text{補元より} \\
&= B + A + A \cdot C && \text{単位元より} \\
&= B + A \cdot (1 + C) && \text{分配法則より} \\
&= A + B
\end{aligned} \tag{2}$$

簡単化された最後の式は、図 14 の回路を表しています。ブール代数の示すとおり、この回路と図 13 は全く同じ動作をします。

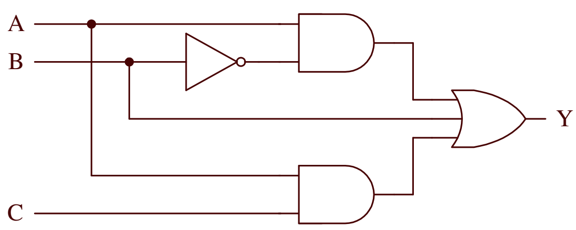

図 13: 元の回路

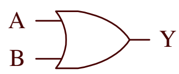

図 14: 簡単にした回路

4　練習問題

4.1　論理式から MIL 記号への変換

以下の論理式を、MIL 記号の AND と OR、NOT ゲートで表現しなさい。

(1) $Z = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$

(2) $Z = A \cdot C + \bar{B} \cdot C$

(3) $Z = \overline{A \cdot C + \bar{B} \cdot C}$

(4) $Z = \left[(A + B \cdot C) + \bar{B}\right] \cdot C$

(5) $Z = (A \cdot B + B \cdot C + C \cdot D + D \cdot A) \cdot (A + B + C + D)$

4.2　真理値表から論理式への変換

以下の真理値表を表すできるだけ簡単な回路を MIL 記号で示せ。回路のみならずそれを求めた手順をきちんと記述すること。

表 11:

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

表 12:

A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

表 13:

A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

4.3　MIL 記号から論理式への変換

以下の問いに答えよ。

問 1　図の論理回路の論理式を書きなさい。

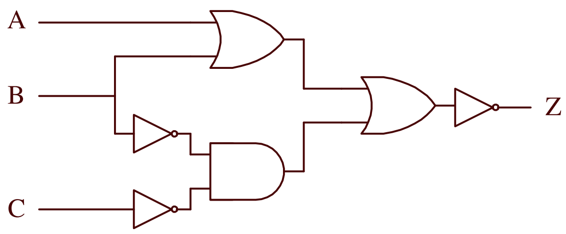

図 15: 回路

問 2 ブール代数の公理や定理を用いて、問 1 の論理式を簡単にしなさい。

問 3 簡略化された論理式を MIL 記号で表現しなさい。

問 4 真理値表を作成しなさい。