電子計算機 **2E**

3E　2003.4.23

本日の授業のテーマ

本日の事業のテーマは、以下のとおりです。

(1) 2 進数と 10 進数
- 2 進数から、10 進数への変換
- 10 進数から、2 進数への変換

本日の授業のゴールは、以下のとおり。
- 10 進数と 2 進数の相互の変換ができる。

0. 先週の復習

・ビットとは情報の単位である。

・1 ビットの情報は、2 個の状態を表すことができる。たとえば、

(1) 電流(電圧)が流れいているか、いないか ← コンピューター内部
(2) 磁化の方向が N か S か、(磁化されているか、いないか) ← ハードディスク
(3) 電荷がたっているか、いないか ← 半導体メモリ
(4) 受光できたか否か ← 光通信

である。

・2 ビットでは 4 個の状態、3 ビットでは 8 個の状態を表現できる。N ビットあると、2^N 個の状態を表すことができます。

・ビットは不連続量で、自然数です。0.5 ビットは有りません。

・正 8 面体サイコロの状態を表すのに必要なビット数は 3 です。8 個の状態があるからです。

・そのサイコロを 2 回振った場合、そのサイコロの目を記録するのに必要な情報量は、6 ビットです。考え方は、2 通り有ります。

(1) 一回目のサイコロの目(1～8)を記録するのに、3 ビット必要。同様に、二回目のサイコロの目(1～8)を記録するのにも、3 ビット必要。あわせて、6 ビット必要になります。

(2) 一回目のサイコロの目は、8 通りの可能性があります。同様に、二回目のサイコロの目も、8 通りの可能性があります。合わせて、$8\times8 = 64$ 通りの可能性があります。これは、$64 = 2^6$ です。したがって、6 ビット必要になります。

前者(1)の方が簡単です。実は、前者の $3\times2 = 6$ ビットも、$2^3\times2^3 = 2^{3+3} = 2^{3\times2} = 2^6$ の計算をしています。根本的には、(1)も(2)も同じです。したがって、100 回分記録するためには、$3\times100 = 300$ ビット必要です。

・1kg 単位で、クラス全員の体重を記録するために、何ビット必要か?。一人の体重は、1～128kg の範囲である。したがって、一人を記録するためには $2^7 = 128$ であるため、7 ビット必要です。クラス全体で、7 ビット×42 人=294 ビット必要になります。

・CD の話は、少し複雑なので省略します。いずれ、講義ノートを web ページに掲載するつもりです。そのとき、見てください。

・先週の授業で言い忘れました。情報科学の世界では、ビット(bit)以外に、バイト(Byte)という単位も使われます。補助単位も使われます。

1 Byte(バイト) = 8 bits (ビット)

		補助単位		
1 kByte	= 1024 Byte	キロ	k	$= 2^{10} = 1024$
1 MByte	= 1048576 Byte	メガ	M	$= 2^{20} = 1048576$
1 GByte	= 1073741824 Byte	ギガ	G	$= 2^{30} = 1073741824$
1 TByte	= 1099511627776 Byte	テラ	T	$= 2^{40} = 1099511627776$

自然科学では $1000=10^3$ で単位が変わりますが、情報科学では $1024 = 2^{10}$ で変わります。

1. 新たな世界へ (2 進数の世界)

1.1 N 進数法とは、

通常使われる数字は、10 進法です。これは、0〜9 の数字を用いて、数を表現します。コンピューターの内部では、2 進法を使っています。0 と 1 だけの 2 個の数字で、すべての数を表現します。1 ビットという単位が 2 個の状態を表すのと対応しています。

N 個の数字で数を表すのを N 進数といいます。また、基数が N と言うこともあります。また、その底は、(0, 1, 2, 3, ・・・, N-1)です。例えば、

数の表現	基数	底
2 進数	2	0, 1
8 進数	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
10 進数	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
16 進数	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

です。

原始人の数の記録	2進法	8進法	10進法	16進法
	0	0	0	0
●	1	1	1	1
●●	10	2	2	2
●●●	11	3	3	3
●●●●	100	4	4	4
●●●●●	101	5	5	5
●●●●●●	110	6	6	6
●●●●●●●	111	7	7	7
●●●●●●●●	1000	10	8	8
●●●●●●●●●	1001	11	9	9
●●●●●●●●●●	1010	12	10	A
●●●●●●●●●● ●	1011	13	11	B
●●●●●●●●●● ●●	1100	14	12	C
●●●●●●●●●● ●●●	1101	15	13	D
●●●●●●●●●● ●●●●	1110	16	14	E
●●●●●●●●●● ●●●●●	1111	17	15	F
●●●●●●●●●● ●●●●●●	10000	20	16	10
●●●●●●●●●● ●●●●●●●	10001	21	17	11
●●●●●●●●●● ●●●●●●●●	10010	22	18	12
●●●●●●●●●● ●●●●●●●●●	10011	23	19	13

1.2 なぜ 2 進数で表現するか

人間の指は、10 本あります。そのため、人類は 10 進法を使っていると言われています。コンピューターの内部では、電圧が 0V か 5V(もっと低い場合もある)で表現をします。指が 2 本しかないのと同じです。だから、コンピューターは 2 進法を使うのです。

では、2 進法を使うメリットとは、何があるのでしょうか?。10 進法ではなく、2 進法を使う理由は、どこにあるのでしょうか?。大体、以下の理由が挙げられます(教科書 P.11)。

(1) ノイズに強い

0～10V で動作する素子からできたコンピューターを考えよう。2 ビットと 10 ビットの場合、割り当てられる電圧のレベルは、図 1 の通りです。図から分かるように、許されるノイズは、2 ビットの方が格段に大きくなります。1 ビットのエラーも許されないデジタルコンピューターにおいては、この差は大きい。

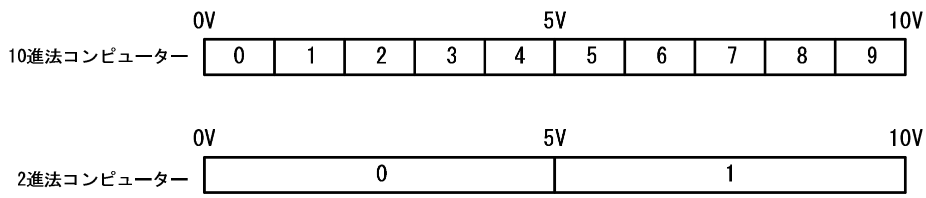

図 1 電圧の振り分け(2 進数 10 進数)

(2) ハードウェアーを実現するのが容易

コンピューター内部には、単純な動作をする。同じような部品が数多くあります。2 進数であれば、入力は 0 と 1、出力も 0 と 1 なので、構成する 1 個の部品が非常に単純になります。

(3) 演算が簡単

例えば、掛け算九九を考えると分かります。10 進数だと、0～9 までの掛け算、合計 100 通りあります。2 進数だと、4 通りしかありません。

(4) ブール代数が使えて、論理演算が容易

ブール代数については、後の講義で勉強します。ここでは、省略。

とはいえ、世界初の電子計算機 ENIAC は、10 進法が使われていました。それ以降の通常の電子計算機は、すべて 2 進法です。

1.3 数字の表現方法

例えば、今年は 2003 年です。10 進数の 2003 の表記はどのような意味があるのでしょうか?。これは、次のように解釈します。えらそうですが、こう解釈すると、他の底の数字の意味がわかりやすくなります。

$$(2003)_{10} = (2\times10^3 + 0\times10^2 + 0\times10^1 + 3\times10^0) \qquad (1)$$

括弧の下の 10 は、10 進法の意味です。

<u>*コーヒーブレイク*</u>

ゼロがない時代は、大変だったのです。ゼロが無いと、(1)のような表記は出来ません。0 (ゼロ)が発見されたのは、6 世紀頃のインドと言われています。西暦 0 年がないのは、このためです。西暦が考えられた頃は、ゼロがなかったのです。

2. 変換(正の整数の場合)

2.1 数の変換 (2 進数から 10 進数へ)

これは、簡単です。(1)式を理解していれば、分かります。2 進数であろうが、10 進数であろうが、表記法は同じです。すなわち、

$$\begin{aligned}(10011)_2 &= (1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0) \\ &= (16+0+0+2+1)_{10} \\ &= (19)_{10}\end{aligned} \qquad (2)$$

となります。ただ、基数が違うだけです。ところで、この演算を施すと、なぜ、10 進数に変換されるのでしょうか?。3 進法や 5 進数ではなく、われわれが普通に使う 10 進数に変換された理由は、なぜでしょうか?。10 進数は特別なのでしょうか?。いいえ、10 進数は特別ではありません。みなさん、考えてください。

2.2 数の変換 (10 進数から 2 進数へ)

つぎに逆を考えましょう。たとえば、先ほどの 19 を

$$(19)_{10} = (a_0\times 2^0 + a_1\times 2^1 + a_2\times 2^2 + a_3\times 2^3 + a_4\times 2^4 + \cdots) \qquad (3)$$

と表現したいのです。それぞれ、a_n を求めなくてはなりません。そこで、次の変形を考えましょう。

$$(9\times 2+1)_{10} = (a_1\times 2^0 + a_2\times 2^1 + a_3\times 2^2 + a_4\times 2^3 + \cdots)\times 2 + a_0 \qquad (4)$$

となります。これをよくにらむと、$a_0 = 1$ ということが分かります。すなわち、a_0 は 19 を 2 で割ったあまりです。残りの部分は、

$$(9)_{10} = (a_1\times 2^0 + a_2\times 2^1 + a_3\times 2^2 + a_4\times 2^3 + \cdots) \qquad (5)$$

となることも分かるでしょう。同じことをすると、

$$(4\times 2+1)_{10} = (a_2\times 2^0 + a_3\times 2^1 + a_4\times 2^2 + a_5\times 2^3 + \cdots)\times 2 + a_1 \qquad (6)$$

となります。したがって、$a_1 = 1$ になります。しつこいようですが、さらに同様に進めると、

$$\begin{aligned}(2\times 2+0)_{10} &= (a_3\times 2^0 + a_4\times 2^1 + a_5\times 2^2 + a_6\times 2^3 + \cdots)\times 2 + a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0 \\ (1\times 2+0)_{10} &= (a_4\times 2^0 + a_5\times 2^1 + a_6\times 2^2 + a_7\times 2^3 + \cdots)\times 2 + a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 0 \\ (0\times 2+1)_{10} &= (a_5\times 2^0 + a_6\times 2^1 + a_7\times 2^2 + a_8\times 2^3 + \cdots)\times 2 + a_4 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 1\end{aligned} \qquad (7)$$

となります。最後の式から、$a_n = 0 \quad (n \geq 5)$ が分かります。以上をまとめると

$$\begin{aligned}(19)_{10} &= (a_4\times 2^4 + a_3\times 2^3 + a_2\times 2^2 + a_1\times 2^1 + a_0\times 2^0) \\ &= (1\times 2^2 + 0\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0) \\ &= (10011)_2\end{aligned} \qquad (8)$$

です。要するに、2 で割ったあまりを書いていけばよいのです。
　よく使われるのは、以下のようにして計算します。

2	) 19	—	1
2	) 9	—	1
2	) 4	—	0
2	) 2	—	0
	1		

2	) 2003	—	1
2	) 1001	—	1
2	) 500	—	0
2	) 250	—	0
2	) 125	—	1
2	) 62	—	0
2	) 31	—	1
2	) 15	—	1
2	) 7	—	1
2	) 3	—	1
	1		

それぞれは、

$$(19)_{10} = (10011)_2 \tag{9}$$

$$(2003)_{10} = (11111010011)_2 \tag{10}$$

に対応します。よく、内容を理解して、変換の練習をしてください。