論理式の簡略化 (クワイン・マクラスキー法)

山本昌志*

2003 年 10 月 21 日

1　はじめに

論理式を簡単にする手段として、最初はブール代数の規則に従い変形を行ました。次に、カルノー図を用いて、簡単化する方法を学習しました。カルノー図を用いる方法は比較的簡単ですが、以下の欠点があります。

- 入力変数が多くなると、表のセルの数が多くなり困難が生じます。6 個の入力変数の数が限界であろう。
- 計算機の処理に向かない。囲む領域を計算するプログラムの作成は少し難しい。計算機は、手間はかかるが単純な作業を繰り替えるアルゴリズムの方がよい。

これらの欠点を解消したのが、クワイン・マクラスキー法と呼ばれる方法です。

2　クワイン・マクラスキー法

クワイン法、あるいはクワイン・マクラスキー法はいろいろな表現の仕方があります。ここでは、参考文献 [1] に従いクワイン法とクワイン・マクラスキー法を分けて説明します。最終的には、クワイン・マクラスキー法を理解することを目指します。これを理解するために、直感的に分かりやすいクワイン法から説明します。

2.1　基本的な考え方

実はカルノー図法も同じですが、クワイン・マクラスキー法はブール代数の次の式を利用します。

$$A \cdot B + A \cdot \bar{B} = A \tag{1}$$

カルノー図の場合、隣り合うセルは 1 ビットのみ異なるため、図を用いて 2 次元的に一度にこの処理を行います。この処理は、コンピューター苦手で、さらに変数が増えると大変になります。

クワイン・マクラスキー法は、手間はかかりますが、ひとつずつ式 (1) を利用して式を簡単化します。同じ手順を繰り返すことにより、処理を行いますので、コンピューター向けと言えます。また、変数が増えた場合、カルノー図よりも簡単になります。

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

2.2　クワイン法

ここは、主に参考文献 [2] を参考にしました。そこでは、クワイン・マクラスキー方と呼んでいますが、ここではクワイン法と呼ぶことにします。呼び方なんてどうでもよいか、内容を理解することが重要です。

実際の例に従って、クワイン法により論理関数を簡単化する手順を示します。以下の論理関数を簡単化することを考えます。

$$z = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D + B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D \tag{2}$$

まずはじめに、これを主加法標準展開します。すると、

$$\begin{aligned} z &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D + B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D \\ &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D + (A + \bar{A}) \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot (D + \bar{D}) + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D \\ &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D \end{aligned} \tag{3}$$

となります。これから、式 (1) を用いて冗長な項 (他の項の表現に含まれる項) を 1 つずつしらみつぶしに消します。

機械的にこの操作を行うために圧縮表というものを使います。それを図 1 に示します。これにより、項を削減して論理関数を簡単化しているのですが、その方法を以下に手順を追って説明します。

1. 加法標準展開した各項 (最小項) を左端に書きます。並べる順序は、各項を 2 進数と見立て、小さい数から並べます。そのままの項は 1、否定の項はゼロをあらわすと考えます。例えば

$$\begin{aligned} \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D &\Rightarrow 0011 \\ A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D &\Rightarrow 1101 \end{aligned}$$

   です。

2. 次に、式 (1) を利用して、第 1 次の圧縮を行います。この場合、可能な組み合わせすべてについて圧縮を行います。そのため、最小項よりも第 1 次圧縮の方が項数が増えることがあります。圧縮できない場合は、その最小項は四角で囲みます。図 1 では圧縮できない最小項はありません。

3. 次に、同じように第 2 次圧縮を行います。2 次圧縮以降では、同一の項が現れるので注意が必要です。ここでも、圧縮できない項は四角で囲みます。図 1 では、$A \cdot B \cdot \bar{C}$ と $A \cdot B \cdot D$ がそれにあたります。

4. 全ての項が圧縮できなくなるまで、同じことを繰り返します。

このようにして、圧縮表を完成させます。この圧縮できない項を主項と言います。普通の人は、これで以下のように簡単化が完了したと錯覚します。

$$z = A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot D + C \cdot D \tag{4}$$

しかし、これはまだ簡単化が可能です。この式は未だ冗長です。

さらに簡単化するためには、主項図を作成して冗長を調べます。表 1 に主項図を示します。この図は、以下の手順で作成します。

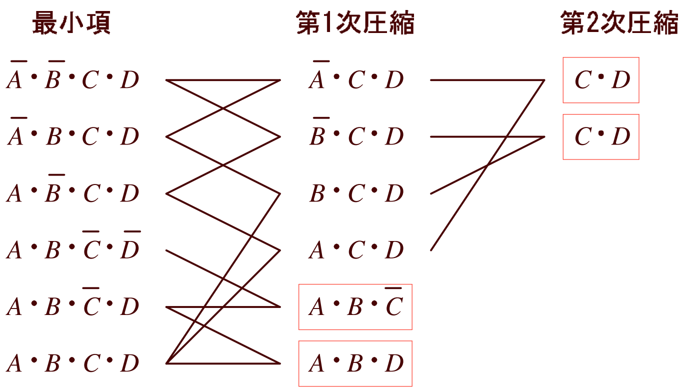

図 1: クワイン法の圧縮表

1. 表の左端の列に、圧縮表で求めた主項を書きます。そして、上端の行には最小項を書きます。この表により、主項と最小項の関係を調べます。
2. 最小項を包含する主項に○印をつけます。この○印の数は、$2^{\text{論理変数の数}-\text{主項の変数の数}}$ になることに注意してください。さらに、各最小項は少なくとも 1 つは○印が付くことにも注意しましょう。
3. それぞれの最小項のうち、○印が 1 つのものは◎印に変更します。この◎印がついた主項は必須項になります。
4. ◎印がついた主項を全て◎印に変更します。

これで、主項図は完成です。後は、これを利用して冗長な主項を見つけ、必要なもののみで論理関数を構成することです。

表 1: 主項図。ここでは、表のカラムのサイズの都合上、乗法の記号 · を省略しています。

主項	最小項					
	$\bar{A}\bar{B}CD$	$ABCD$	$\bar{A}BCD$	$AB\bar{C}D$	$AB\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}CD$
CD	◎	◎	◎			◎
$AB\bar{C}$				◎	◎	
ABD		○		○		

この主項図から、最も簡単化された論理関数を求めます。方法は簡単で、まず必須項を書き出します。そして、残りの主項で最小項を全て含む最も簡単な組み合わせを探します。もし、◎印が 1 つも含まれない最小項が有れば適当な主項を選択すれば良いということです。

表 1 の場合、必須項のみで全ての最小項を含みますので、簡単化は

$$z = C\cdot D + A\cdot B\cdot\bar{C} \tag{5}$$

となります。表 1 から明らかなように、$A\cdot B\cdot D$ が冗長な項です。

2.3 クワイン・マクラスキー法

クワイン・マクラスキー法は、クワイン法と非常によく似ています。ほとんど同じと言っていいかもしれません。ただ、最初にクワイン・マクラスキー法を説明すると、操作の内容が理解しにくいためにクワイン法を説明しました。実際には、クワイン・マクラスキー法が重要なので、先に示したクワイン法は忘れてもかまいません。

クワイン法とクワイン・マクラスキー法の違いは、圧縮表の作り方だけです。主項図は同じです。クワイン法では論理変数を用いて圧縮表を作成しましたが、クワイン・マクラスキー方では 2 進数を用います。2 進数を 10 進数表示して、圧縮する方法もあります [3]。10 進数で圧縮表を作ると表が小さくなって良いのですが、混乱する可能性が有りますので、ここでは 2 進数で圧縮表を作成します。教科書と同じ方法です。

それでは、違う例題を用いて圧縮表の作り方を説明します。次の論理関数を簡単化することを考えます。

$$\begin{aligned} z = \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}\cdot\bar{E} + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot\bar{D}\cdot\bar{E} + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot D\cdot E + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D\cdot E \\ + A\cdot\bar{B}\cdot C\cdot\bar{D}\cdot\bar{E} + A\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D\cdot E + \bar{A}\cdot B\cdot C\cdot\bar{D}\cdot E + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot D\cdot\bar{E} \\ + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D\cdot\bar{E} + A\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D\cdot\bar{E} \end{aligned} \tag{6}$$

クワイン・マクラスキー法の完成した圧縮表を図 2 に示します。この圧縮表の作成方法は、クワイン法と似ていますが詳細は異なります。以下にその手順を示します。

1. まず、与えられた論理関数を主加法標準展開します。
2. 最小項を 2 進数で表現します。そのままの変数は 1、否定のはゼロをあらわすと考えます。例えば
   $$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D\cdot\bar{E} \Rightarrow 00110$$
   $$A\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D\cdot E \Rightarrow 10111$$
   です。
3. 加法標準展開した各項 (最小項) を圧縮表の左端に書きます。最小項を並べる場合、2 進数に変換した 1 の数によりグループ分けします。そして、グループの中で、数の小さい項から上から順に並べます。
4. 次に、式 (1) を利用して、第 1 次の圧縮を行います。この場合、可能な組み合わせすべてについて圧縮を行います。そのため、最小項よりも第 1 次圧縮の方が項数が増えることがあります。圧縮できない場合は、その最小項は四角で囲みます。図 2 では 01101 がそれにあたります。この四角で囲まれたものが主項になります。
5. 次に、同じように第 2 次圧縮を行います。2 次圧縮以降では、同一の項が現れるので注意が必要です。ここでも、圧縮できない項は四角で囲みます。
6. 全ての項が圧縮できなくなるまで、同じことを繰り返します。

以上の操作により圧縮表が完成します。後は完成した図 2 の圧縮表から、主項図を作成します。主項図の作成要領は、クワイン法と同じなのでここでは説明しません。

表 2 に完成した主項図を示します。この主項図から、簡単化された論理関数は、

$$z = \bar{A}\cdot B\cdot C\cdot\bar{D}\cdot E + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{E} + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot D + \bar{B}\cdot C\cdot\bar{E} + \bar{B}\cdot C\cdot D \tag{7}$$

となります。

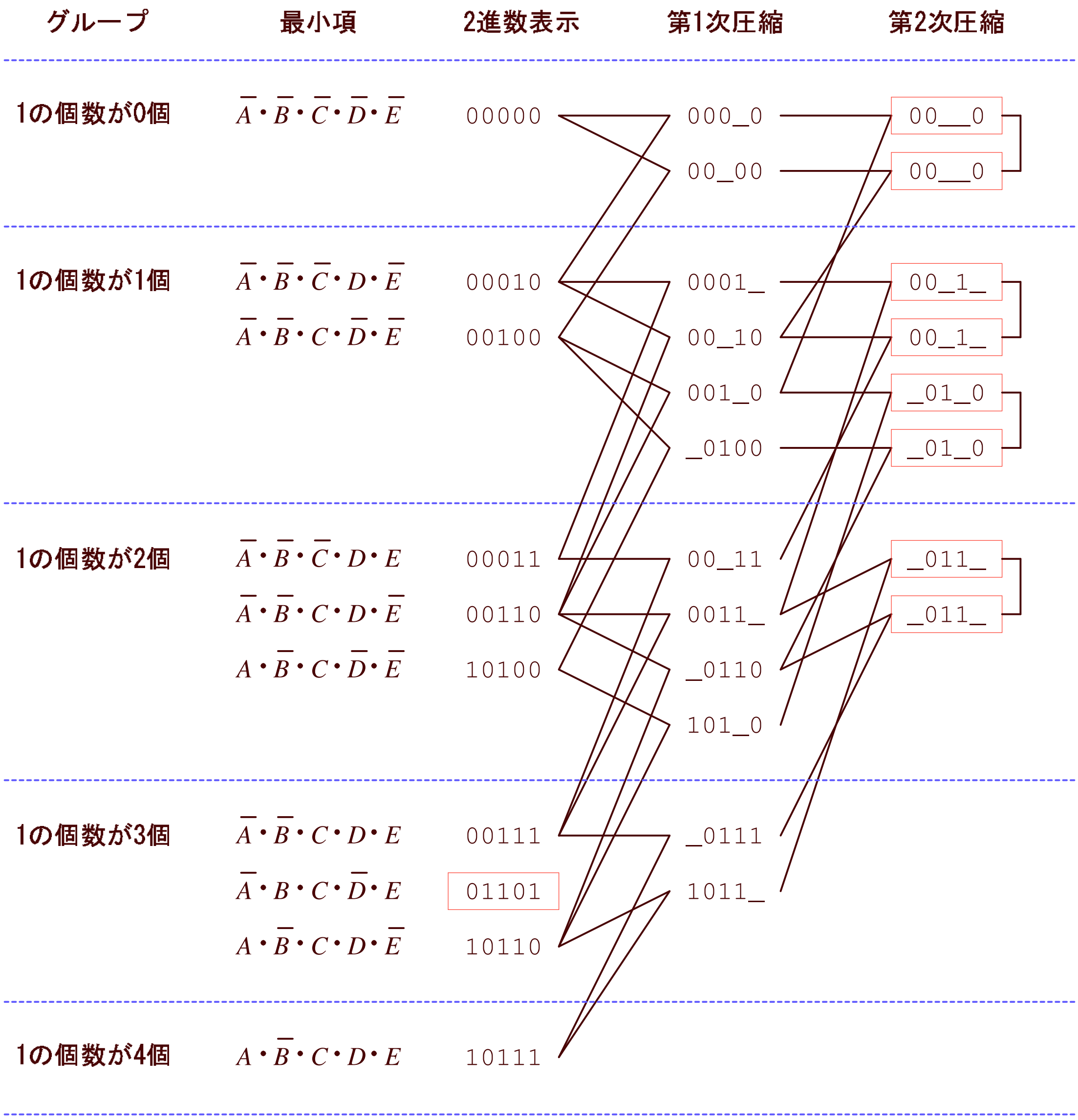

図 2: クワイン・マクラスキー法の圧縮表

表 2: 主項図。ここでは、表のカラムのサイズの都合上、2 進数で表示しています。もちろん、論理変数で表示しても問題ありません。

主項	最小項									
	00000	00010	00100	00011	00110	10100	00111	01101	10110	10111
01101								◎		
00__0	◎	◎	◎		◎					
00_1_		◎		◎	◎		◎			
_01_0			◎		◎	◎			◎	
_011_					◎		◎		◎	◎

2.4　まとめ

クワイン・マクラスキー法を用いて、論理関数を簡単化する手順をまとめておきます。これは大きく分けて、3 つの部分から成り立っています。圧縮表と主項図、そして論理関数の作成です。それぞれについて、その手順をまとめます。

まず、圧縮表の作成手順は以下の通りです。

1. まず、与えられた論理関数を主加法標準展開します。
2. 最小項を 2 進数で表現します。そのままの変数は 1、否定のはゼロをあらわすと考えます。例えば
$$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D\cdot\bar{E} \Rightarrow 00110$$
$$A\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D\cdot E \Rightarrow 10111$$
です。
3. 加法標準展開した各項 (最小項) を圧縮表の左端に書きます。最小項を並べる場合、2 進数に変換した 1 の数によりグループ分けします。そして、グループの中で、数の小さい項から上から順に並べます。
4. 次に、$A\cdot\bar{B}+A\cdot B=A$ を利用して、第 1 次の圧縮を行います。この場合、可能な組み合わせすべてについて圧縮を行います。そのため、最小項よりも第 1 次圧縮の方が項数が増えることがあります。圧縮できない場合は、その最小項は四角で囲みます。この圧縮できない項を主項と言います。
5. 次に、同じように第 2 次圧縮を行います。2 次圧縮以降では、同一の項が現れるので注意が必要です。ここでも、圧縮できない項は四角で囲みます。
6. 全ての項が圧縮できなくなるまで、同じことを繰り返します。

次にこの圧縮表を用いて主項図を作成します。その手順は、以下の通りです。

1. 表の左端の列に、圧縮表で求めた主項を書きます。そして、上端の行には最小項を書きます。この表により、主項と最小項の関係を調べます。

2. 最小項を包含する主項に○印をつけます。この○印の数は、$2^{\text{論理変数の数}-\text{主項の変数の数}}$ になることに注意してください。さらに、各最小項は少なくとも 1 つは○印が付くことにも注意しましょう。

3. それぞれの最小項のうち、○印が 1 つのものは◎印に変更します。この◎印がついた主項は必須項になります。

4. ◎印がついた主項を全て◎印に変更します。

これで圧縮表は完成します。最後にこの圧縮表を用いて、簡単化された論理関数を求めます。要領は以下の通りです。

1. 必須項の和で論理関数を作ります。

2. もし、◎印が 1 つも含まれない最小項が有れば、最も簡単な主項を選択し、先の論理関数に加算します。

3 練習問題

問題 1 4 変数の真理値表で、$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}$、$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot D$、$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D$、$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot\bar{D}$、$A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}$、$A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot D$、$A\cdot\bar{B}\cdot C\cdot\bar{D}$ が 1 のときの論理式をクワイン・マクラスキー法で簡単化せよ。

問題 2 以下の論理関数をクワイン・マクラスキー法で簡単にせよ。

$$
\begin{aligned}
Z = {} & \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot D + A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot\bar{D} + A\cdot\bar{B}\cdot C\cdot\bar{D} + A\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D \\
& + A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot D + \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}\cdot\bar{D} + \bar{A}\cdot B\cdot C\cdot\bar{D} + A\cdot B\cdot C\cdot\bar{D}
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] 井澤裕司. http://laputa.cs.shinshu-u.ac.jp/~ yizawa/logic/chap5/chap5.html.

[2] 小池誠彦. http://cis.k.hosei.ac.jp/~ koike/logic/lecture5.pdf.

[3] 田丸啓吉. デイジタル回路. (株) 昭晃堂, 1994.