ブール代数練習問題解答

山本昌志*

平成 15 年 9 月 17 日

解答を示す前に、公理を書いておきます。試験でも公理は示しますが、定理は示しません[1]。

公理 0.1 (ブール代数)

$$
\begin{aligned}
&\text{交換法則} \quad A+B=B+A, && A\cdot B=B\cdot A && (1)\\
&\text{分配法則} \quad A\cdot(B+C)=(A\cdot B)+(A\cdot C), && A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C) && (2)\\
&\text{単位元} \quad A+0=A, && A\cdot 1=A && (3)\\
&\text{補元} \quad A+\bar{A}=1, && A\cdot\bar{A}=0 && (4)
\end{aligned}
$$

1 ブール代数の演算

1.1 定理の証明

1. 公理のみを用いて $A\cdot 0=0$ を証明せよ。

   【証明】 1 $A\cdot 0=0$ を証明します。

$$
\begin{aligned}
A\cdot 0 &= (A\cdot 0)+0 && [\text{公理:式 (3)}]\\
&= (A\cdot 0)+(A\cdot\bar{A}) && [\text{公理:式 (4)}]\\
&= A\cdot(0+\bar{A}) && [\text{公理:式 (2)}]\\
&= A\cdot(\bar{A}+0) && [\text{公理:式 (1)}]\\
&= A\cdot\bar{A} && [\text{公理:式 (3)}]\\
&= 0 && [\text{公理:式 (4)}]
\end{aligned}
$$

   証明終わり。

2. ド・モルガンの法則 $\overline{(A\cdot B)}=\bar{A}+\bar{B}$ を真理値表を用いて証明せよ。

   【証明】 2 (ド・モルガンの法則) $\overline{(A\cdot B)}=\bar{A}+\bar{B}$ を証明する。左辺と右辺の真理値表が等しいことで証明とする。真理値表は表 *1* のとおりで、左辺と右辺が等しいことが証明できた。

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

[1]公理は試験問題に書きますが、定理は書きません

表 1: ド・モルガンの法則の真理値表。

A	B	$A\cdot B$	$\overline{(A\cdot B)}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$(\bar{A}+\bar{B})$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

1.2 演算

次の式を計算せよ。演算の順序は通常のとおりとする (積が和より優先)。

(1) $1+1=1$

(2) $1+1+1=1$

(3) $1\cdot 1\cdot 1=1$

(4) $1\cdot 1\cdot 0=0$

(5) $(1+1)\cdot(1+0)\cdot 0+1=1$

(6) $\bar{1}+\bar{0}=0+1=1$

(7) $\bar{0}\cdot\bar{0}+0=1\cdot 1+0=1$

(8) $\overline{\bar{0}\cdot 0+0}=\overline{1\cdot 0+0}=1$

(9) $\overline{\overline{\bar{0}+\bar{0}}}=\bar{0}+\bar{0}=1$

(10) $(\overline{\bar{1}+\bar{1}})\cdot(\overline{\bar{0}\cdot\bar{0}})=(1\cdot 1)\cdot(0+0)=0$

1.3 代数演算

次の論理式を簡単にせよ。演算の順序は通常のとおりとする (積が和より優先)。

(1)
$$\begin{aligned}\overline{A+(B\cdot C)} &= \bar{A}\cdot\overline{(B\cdot C)}\\ &= \bar{A}\cdot(\bar{B}+\bar{C})\\ &= \bar{A}\cdot\bar{B}+\bar{A}\cdot\bar{C}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\overline{(A\cdot\bar{B})+(\bar{A}\cdot B)} &= \overline{(A\cdot\bar{B})}\cdot\overline{(\bar{A}\cdot B)}\\ &= (\bar{A}+\bar{\bar{B}})\cdot(\bar{\bar{A}}+\bar{B})\\ &= (\bar{A}+B)\cdot(A+\bar{B})\\ &= \bar{A}\cdot A+\bar{A}\cdot\bar{B}+B\cdot A+B\cdot\bar{B}\\ &= \bar{A}\cdot\bar{B}+A\cdot B\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(3)\quad \overline{(A\cdot B)+(\bar{C}\cdot\bar{D})} &= \overline{(A\cdot B)}\cdot\overline{(\bar{C}\cdot\bar{D})} \\
&= (\bar{A}+\bar{B})\cdot(\bar{\bar{C}}+\bar{\bar{D}}) \\
&= (\bar{A}+\bar{B})\cdot(C+D)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4)\quad \{(A\cdot B)+(\bar{A}\cdot B)\}\cdot C &= \{(A+\bar{A})\cdot B\}\cdot C \\
&= (1\cdot B)\cdot C \\
&= B\cdot C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(5)\quad \overline{\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}+A+B+C} &= \overline{\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}}\cdot\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} \\
&= (\bar{\bar{A}}+\bar{\bar{B}}+\bar{\bar{C}})\cdot\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} \\
&= (A+B+C)\cdot\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} \\
&= A\cdot\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}+\bar{A}\cdot B\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}+\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot\bar{C} \\
&= 0\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}+\bar{A}\cdot 0\cdot\bar{C}+\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(6)\quad (A\cdot B\cdot C+\bar{A})\cdot(A+\bar{C}) &= A\cdot A\cdot B\cdot C+A\cdot\bar{A}+\bar{C}\cdot A\cdot B\cdot C+\bar{C}\cdot\bar{A} \\
&= A\cdot B\cdot C+0+0+\bar{A}\cdot\bar{C} \\
&= A\cdot B\cdot C+\bar{A}\cdot\bar{C}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(7)\quad (A\cdot B+C)\cdot A &= A\cdot A\cdot B+A\cdot C \\
&= A\cdot B+A\cdot C \\
&= A\cdot(B+C)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(8)\quad \bar{A}\cdot B+\bar{A}\cdot\bar{C}+A\cdot B\cdot C &= B\cdot(\bar{A}+A\cdot C)+\bar{A}\cdot\bar{C}\\
&= B\cdot(\bar{A}+A)\cdot(\bar{A}+C)+\bar{A}\cdot\bar{C}\\
&= B\cdot(\bar{A}+C)+\bar{A}\cdot\bar{C}\\
&= (\bar{A}\cdot\bar{C}+B)\cdot(\bar{A}\cdot\bar{C}+\bar{A}+C)\\
&= (\bar{A}\cdot\bar{C}+B)\cdot\{\bar{A}\cdot(\bar{C}+1)+C\}\\
&= (\bar{A}\cdot\bar{C}+B)\cdot(\bar{A}+C)\\
&= (\bar{A}\cdot\bar{C}+B)\cdot\{\bar{A}\cdot(C+\bar{C})+C\}\\
&= (\bar{A}\cdot\bar{C}+B)\cdot(\bar{A}\cdot C+\bar{A}\cdot\bar{C}+C)\\
&= (\bar{A}\cdot\bar{C}+B)\cdot\{\bar{A}\cdot\bar{C}+C\cdot(\bar{A}+1)\}\\
&= (\bar{A}\cdot\bar{C}+B)\cdot(\bar{A}\cdot\bar{C}+C)\\
&= \bar{A}\cdot\bar{C}+B\cdot C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(9)\quad A\cdot\bar{B}+A\cdot B+\bar{A}\cdot\bar{B} &= A\cdot(\bar{B}+B)+\bar{A}\cdot\bar{B}\\
&= A+\bar{A}\cdot\bar{B}\\
&= (A+\bar{A})\cdot(A+\bar{B})\\
&= A+\bar{B}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(10)\quad A\cdot B+A\cdot C+A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} &= A\cdot(B+C+\bar{B}\cdot\bar{C})\\
&= A\cdot(B+C+\bar{B})\cdot(B+C+\bar{C})\\
&= A\cdot(C+1)\cdot(B+1)\\
&= A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(11)\quad A\cdot B+C+A\cdot B\cdot C+B\cdot\bar{C} &= A\cdot B\cdot(1+C)+C+B\cdot\bar{C}\\
&= A\cdot B+C+B\cdot\bar{C}\\
&= A\cdot B+(C+B)\cdot(C+\bar{C})\\
&= A\cdot B+C+B\\
&= B\cdot(A+1)+C\\
&= B+C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(12)\quad A\cdot B + A\cdot B\cdot C + A\cdot\bar{B} + A\cdot\bar{B}\cdot C &= A\cdot B(1+C) + A\cdot\bar{B}\cdot(1+C)\\
&= A\cdot B + A\cdot\bar{B}\\
&= A\cdot(B+\bar{B})\\
&= A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(13)\quad \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C} + A\cdot B\cdot\bar{C} + A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} &= \bar{A}\cdot\bar{C}\cdot(\bar{B}+B) + A\cdot\bar{C}(B+\bar{B})\\
&= \bar{A}\cdot\bar{C} + A\cdot\bar{C}\\
&= \bar{C}\cdot(\bar{A}+A)\\
&= \bar{C}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(14)\quad A\cdot B + A\cdot B\cdot\overline{(C\cdot D)} + \overline{A\cdot D} &= A\cdot B + A\cdot B\cdot(\bar{C}+\bar{D}) + (\bar{A}+\bar{D})\\
&= A\cdot B\cdot(1+\bar{C}+\bar{D}) + (\bar{A}+\bar{D})\\
&= A\cdot B + \bar{A} + \bar{D}\\
&= A\cdot B + \overline{(A\cdot D)} && \text{教科書の解答}\\
&= A\cdot B + \bar{A} + \bar{D}\\
&= (\bar{A}+A)\cdot(\bar{A}+B) + \bar{D}\\
&= \bar{A} + B + \bar{D} && \text{こちらの方がより良い}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(15)\quad & \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot\bar{D} + A\cdot B\cdot C\cdot D + \bar{A}\cdot B\cdot C\cdot\bar{D} + \bar{A}\cdot B\cdot C\cdot D + \bar{A}\cdot B\cdot C\cdot\bar{D}\\
&= \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot(\bar{D}+D) + \bar{A}\cdot B\cdot C\cdot\bar{D} + \bar{A}\cdot B\cdot C\cdot D\\
&= \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}\cdot D + A\cdot B\cdot C + \bar{A}\cdot B\cdot C\cdot(\bar{D}+D)\\
&= \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}\cdot D + A\cdot B\cdot C + \bar{A}\cdot B\cdot C\\
&= \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}\cdot D + (A+\bar{A})\cdot B\cdot C\\
&= \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}\cdot D + B\cdot C\\
&= B\cdot(\bar{A}\cdot\bar{C}\cdot D + C)\\
&= B\cdot(\bar{A}+C)\cdot(\bar{C}+C)\cdot(D+C)\\
&= B\cdot(C+\bar{A}\cdot D)\\
&= \bar{A}\cdot B\cdot D + B\cdot C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(16)\quad (A+B\cdot C)\cdot(A+C\cdot D) &= A + (B\cdot C)\cdot(C\cdot D)\\
&= A + B\cdot C\cdot D
\end{aligned}
$$

2　回路の問題

2.1　スイッチの回路

1. 授業中に配布したプリントの図 1(1) の回路の動作をブール代数式で記述せよ。

　【解答】 1 図の回路をブール代数を用いて記述すると、以下のようになる。

$$\text{回路} = \left[A + (\bar{A} \cdot \bar{B})\right] + \left[B \cdot (B + \bar{C}) \cdot \left\{C + (\bar{B} \cdot C) + (B \cdot A)\right\}\right] + [A + (B \cdot C)]$$

2. 式を簡略化し、図 1(2) の回路に等しいことを示せ。

　【解答】 2 式を変形すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\text{回路} &= \left[A + (\bar{A} \cdot \bar{B})\right] + \left[B \cdot (B + \bar{C}) \cdot \left\{C + (\bar{B} \cdot C) + (B \cdot A)\right\}\right] + [A + (B \cdot C)] \\
&= A + \bar{A} \cdot \bar{B} + (B + B \cdot \bar{C}) \cdot (C + \bar{B} \cdot C + A \cdot B) + B \cdot C \\
&= A + \bar{A} \cdot \bar{B} + B \cdot (1 + \bar{C}) \cdot \left\{C(1 + \bar{B}) + A \cdot B\right\} + B \cdot C \\
&= A + \bar{A} \cdot \bar{B} + B \cdot (C + A \cdot B) + B \cdot C \\
&= A + \bar{A} \cdot \bar{B} + B \cdot C + A \cdot B + B \cdot C \\
&= A \cdot (1 + B) + \bar{A} \cdot \bar{B} + B \cdot C \\
&= A + B \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \qquad \text{図 } \mathit{1(2)} \text{ の回路。しかし、もっと簡単になる}\mathit{)} \\
&= (A + \bar{A}) \cdot (A + \bar{B}) + B \cdot C \\
&= A + \bar{B} + B \cdot C \\
&= A + (\bar{B} + B) \cdot (\bar{B} + C) \\
&= A + \bar{B} + C
\end{aligned}$$

2.2　論理回路

今回は範囲外とします。