主加法標準形と主乗法標準形

山本昌志*

2003 年 10 月 10 日

1 はじめに

ブール代数という数学の理論がスイッチの回路に適用できて、便利そうなものであることが理解できていると思います。実際に試験の成績も、まずまずでした。ここで、ブール代数という一段高い理論の天界から舞い降りて、現実の回路の問題に進むこともできます。その準備はかなりできていますが、もう少し高いところから、論理というものを見てみましょう。

本日は、まず論理関数 (ブール関数) というものから説明します。そうして、もう一度、真理値表の話をします。そうして、真理値表から論理式を導く方法を示します。今までは、論理式から真理値表を導いていたのですが、その逆の方法を示します。

ここまでくれば後は簡単で、任意の真理値表から論理式ができることが分かります。本日の授業で最も重要なことは、「どんな真理値表も $\{+, \cdot, \bar{}\}$ から構成される論理式で表すことができる」ということが理解できることです。任意の真理値表が $\{+, \cdot, \bar{}\}$ から構成できるので、コンピューターの演算回路がこの 3 つの回路から構成可能ということになります。

2 論理関数と真理値表

論理関数とは、以前の授業で論理式と言っていたものです。ブール関数とかスイッチング関数と呼ばれることもあります。変数は $(0, 1)$ のみで、演算子は $\{+, \cdot, \bar{}\}$ の 3 個しかありません。要するに論理関数というものは、変数 A, B, C, $\cdots$ があるとき、

$$Z = F(A, B, C, \cdots) \tag{1}$$

のようになっているものを言います。論理式のことです。当然、この関数の演算の結果は、$(0, 1)$ のいずれかになります。

変数の 0 のことを偽 (false)、1 のことを真 (true) と言ったりすることがあります。その場合、$+$ のことを OR(又は)、$\cdot$ のことを AND(かつ)、$\bar{}$ を否定 (NOT) といいます。この場合、変数 A, B, C, $\cdots$ は命題を表します。1 年生の時に学習した FORTRAN の論理式です。あの時も、.OR. とか. AND. とか.NOT. の論

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

理演算子を使ったと思います。命題とは、FORTRAN の A.GT.B とかに対応します。命題の話はこれくらいにしておきます。

もうひとつ、真理値表のことを述べておきます。変数がとりうる全ての値と Z の関係を表したものを真理値表と呼びます。変数が少ない場合は、真理値表は簡単ですが、変数の数が増えると大変です。変数の数を N とすると、2^N 行必要になります。

2.1 真理値表から論理式を導く

ここで、興味のある問題は、「任意の真理値表は OR(+) と AND($\cdot$)、NOT($^-$) で書き表すことができるか?」ということです。この問いに対する答えは、「YES」です。このことを、「OR(+) と AND($\cdot$)、NOT($^-$) は完全系をなす」といいます。この証明は非常に大変でこの講義のレベルを超えます。講義ではなくて、私の頭のレベルを超えるのか$\cdots$。従って、完全な証明をしません (できません) が、任意の真理値表から論理関数を導く方法を示すことにより、そのことを理解してもらいたいと思います。これなら理解できる。

ここでは、真理値表から論理式を導く方法として、主加法標準展開と主乗法標準展開という方法を示します。教科書は非常に分かりづらいので、以降の議論は松本光功著「論理回路」を参考にしました。

2.1.1 主加法標準形

3 変数 (入力)A, B, C を含む論理関数で、その出力を Z とします。例えば、表 1 のようなものです。各変数を一つずつ含む式を標準項 (canonical term) といいます。例えば、$A \cdot B \cdot C$ や $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$、$A + B \cdot C$、$A \cdot \bar{B} + C$、$A + B + C$、$A + \bar{B} + \bar{C}$ などがそうです。このうち最も項が少ないもの、例えば $A \cdot B \cdot C$ や $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$ を最小項 (minterm) といいます。項というのは数学が学習したものと同じで、乗算のかたまりを 1 つの項として数えます。要するに最小項の標準項が乗算のみで構成されており、その項数は 1 となります。一方、$A + B + C$、$A + \bar{B} + \bar{C}$ のように最も項数の多いものを最大項 (maxterm) といいます。最大項の項数は、変数の数と同じになります。$A + B \cdot C$ や $A \cdot \bar{B} + C$ は、項数 2 で最小項でも最大項でもありません。

準備ができたので、表 1 で示されている真理値表から、論理式を導き出します。まずは、主加法標準形で最小項を利用した方法を示します。

表 1 を見てください。入力変数が $A = 1$ の場合 A、$A = 0$ の場合 $\bar{A}$ と表します。B や C も同様です。そして、それらを乗算して最小項を書き出します。つまり、表 1 の最小項ようにします。入力が 8 種類あるので 8 個の最小項を得ることができます。おのおのの最小項は、それに応じた入力の時のみ 1 になります。例えば、(A, B, C) の入力が $(0, 0, 0)$ の場合、その出力が 1 になる論理関数は、表から分かるように $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ のみです。$(1, 0, 1)$ の場合は $A \cdot \bar{B}C$ のみという具合です。

そうして、今度は出力 Z を注目します。出力 Z のうち、$Z = 1$ となる最小項を次のように加算します。

$$Z = \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C \tag{2}$$

これが、元の真理値表を表す論理式になっています。式 (2) は 4 つの最小項を含み、それぞれが 1 になる場合を加算しているので、元の真理値表を表すのはあたりまえですよね。

このように最小項の和で表すことを主加法標準形、あるいは主加法標準展開 (principal disjunctive canonical expansion) といいます。もう一度の手順をまとめると以下のようになります。

1. 真理値表に従い、入力が $A = 0$ のとき $\bar{A}$、$A = 1$ のとき A と表す。B、C、$\cdots$ と入力変数の数だけ同じように表す。

2. そうして、それらを乗算して、最小項を作る。これを全ての入力の組み合わせについて行う。

3. 次に、出力 $Z = 1$ の場合の最小項を加算する。これで主加法標準形が完成します。

表 1: 3 入力の真理値表と最小項

入力			出力	最小項
A	B	C	Z	
0	0	0	0	$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$
0	0	1	0	$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$
0	1	0	0	$\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$
0	1	1	1	$\bar{A} \cdot B \cdot C$
1	0	0	0	$A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$
1	0	1	1	$A \cdot \bar{B} \cdot C$
1	1	0	1	$A \cdot B \cdot \bar{C}$
1	1	1	1	$A \cdot B \cdot C$

2.1.2 主乗法標準形

主加法標準形では出力 Z の値が 1 になるものに着目しましたが、主乗法標準形では Z が 0 になるものに着目します。今度は主加法標準形とは逆に、入力変数が $A = 1$ の場合 $\bar{A}$、$A = 0$ の場合 A と表します。B や C も同様です。そして、それらを加算して最大項を書き出します。つまり、表 2 のようにします。おのおのの最大項は、それに応じた入力の時のみ 0 になります。例えば、(A, B, C) の入力が $(0, 0, 0)$ の場合、その出力が 0 になる論理関数は、表から分かるように $A + B + C$ のみです。$(1, 0, 1)$ の場合は $\bar{A} + B + \bar{C}$ のみという具合です。

そうして、今度は出力 Z を注目します。出力 Z のうち、$Z = 0$ となる最大項を次のように乗算します。

$$Z = (A + B + C) \cdot (A + B + \bar{C}) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (\bar{A} + B + C) \tag{3}$$

これが、元の真理値表を表す論理式になっています。式 (3) は 4 つの最大項を含み、それぞれが 0 になる場合を乗算しているので、元の真理値表を表すのはあたりまえですよね。

このように最大項の積で表すことを主乗法標準形、あるいは主乗法標準展開 (principal conjunctive canonical expansion) といいます。もう一度の手順をまとめると以下のようになります。

1. 真理値表に従い、入力が $A = 0$ のとき A、$A = 1$ のとき $\bar{A}$ と表す。B、C、$\cdots$ と入力変数の数だけ同じように表す。

2. そうして、それらを加算して、最大項を作る。これを全ての入力の組み合わせについて行う。

3. 次に、出力 $Z=0$ の場合の最大項を乗算する。これで主乗法標準形が完成します。

表 2: 3 入力の真理値表と最大項

入力			出力	最大項
A	B	C	Z	
0	0	0	0	$A+B+C$
0	0	1	0	$A+B+\bar{C}$
0	1	0	0	$A+\bar{B}+C$
0	1	1	1	$A+\bar{B}+\bar{C}$
1	0	0	0	$\bar{A}+B+C$
1	0	1	1	$\bar{A}+B+\bar{C}$
1	1	0	1	$\bar{A}+\bar{B}+C$
1	1	1	1	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$

3 最後に

ここで、2 つの方法で任意の真理値表から論理式を導く方法を示しました。いずれの方法も殆ど同じ (あるいは反対と考えてもよい) ですが、得られた式をさらに簡単にする場合を考えると、主加法標準展開の方が簡単です。

主加算標準展開または主乗算標準展開を使えば、任意の真理値表は、OR(+) と AND(·) と NOT(¯) で表現可能であることが理解できたと思います。このようなセット (OR,AND,NOT) を完全系といいます。ここで、更なる疑問が湧くと思います。それは、「OR と AND、NOT 以外で完全系になる演算子はあるか?」、「3 つ以下の演算子で、完全系をなすものはあるか?」という疑問です。いずれの問いも「YES」と答えることが出来ます。後に学習しますが、NAND や NOR という演算子はそれ 1 つだけで任意の真理値表を論理式に出来ます。

4 練習問題

次に示す真理値表を主加法標準形と主乗法標準形で表現しなさい。そうして、各々の式を簡略化して、双方が等しいことを確認せよ。

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

A	B	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1