電子計算機 2E

3E　2003.5.7

本日の授業のテーマ

本日の事業のテーマは、以下のとおりです。

(1) ビットと 2 進数
(2) 小数
・2 進数小数から、10 進数小数への変換
・10 進数小数から、2 進数小数への変換

本日の授業のゴールは、以下のとおり。
・2 進数とビットの関係がわかる。
・小数の表記も、整数の延長として捕らえることができる。
・2 進数と 10 進数との間で、小数の変換ができる。

0. 先週の復習

・いろいろな数の表記方法があります。N 進数の場合、N 個の底で数を表現します。

2 進数	0, 1
8 進数	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
10 進数	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
16 進数	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

・コンピューターの内部で、10 進数を使わないで、2 進数を使う理由は、

(1) ノイズに強い
(2) ハードウェアーを実現するのが容易
(3) 演算が簡単
(4) ブール代数が使えて、論理演算が容易

からです。

・我々が通常用いていうる、数の表現の意味は、次の通りです。数字の並ぶ順序が重要です。

$$(1905)_{10} = (1\times10^3 + 9\times10^2 + 0\times10^1 + 5\times10^0)$$

・2 進数から、10 進数への変換は、通常の表記法を考えれば、簡単に計算できます。。

$$\begin{aligned}(1101)_2 &= (1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times10^0)\\ &= (8+4+0+1)\\ &= (13)_{10}\end{aligned}$$

・逆に、10 進数から 2 進数への変換は、2 で割った余りを並べることにより計算できます。

2	19	— 1
2	9	— 1
2	4	— 0
2	2	— 0
	1	

2	2003	— 1
2	1001	— 1
2	500	— 0
2	250	— 0
2	125	— 1
2	62	— 0
2	31	— 1
2	15	— 1
2	7	— 1
2	3	— 1
	1	

それぞれ、$(19)_{10}=(10011)_2$、$(2003)_{10}=(11111010011)_2$ である。

1. ビットと **2** 進数

2 進数で数字を表す方法が理解できたと思います。小数や負の数の表現を学ぶ前に、ビットと 2 進数の関係について、説明をしておいたほうが良いでしょう。

以前、情報の単位として、ビットというものを示したでしょう。このビットと 2 進数の関係を示します。1 ビットでは、2 個の状態を表すことができます。2 ビットでは 4 個の状態、3 ビットでは 8 個の状態を表現できます。N ビットあると、2^N 個の状態を表すことができます。以前に学んだ通りです。

例えば、PIC と呼ばれている 1 チップマイコンでは、図 1 に示す RB0～RB7 のピンがビットに対応しています。これらの 8 個のピンにより、デジタル信号を入出力します。8 本のピンを使っているので、8 ビットです。したがって、2^8=256 通りの状態を表すことが出来ます。

0～255 の間の整数を出力する場合、以下のピンが各ビットを表します。

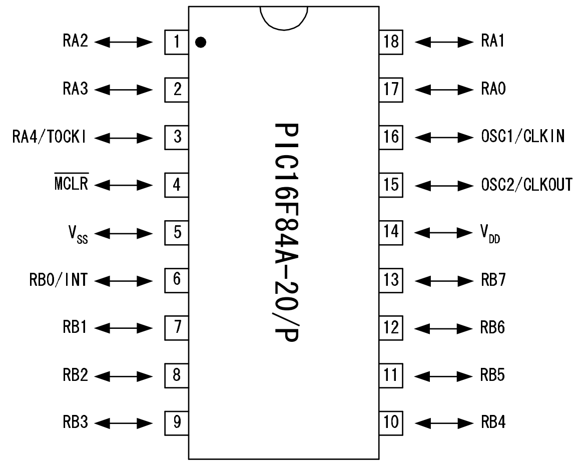


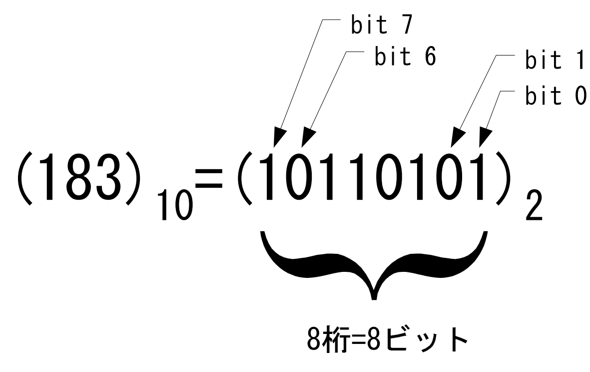
図 1 PIC のピン配列

ピン番号	13	12	11	10	9	8	7	6
名称	RB7	RB6	RB5	RB4	RB3	RB2	RB1	RB0
ビット	bit 7	bit 6	bit 5	bit 4	bit 3	bit 2	bit 1	bit 0

したがって、$(183)_{10}$=$(10110101)_2$ を出力する場合、各ピンの電圧は、

名称	RB7	RB6	RB5	RB4	RB3	RB2	RB1	RB0
電圧 [V]	5	0	5	5	0	5	0	5
2 進数	1	0	1	1	0	1	0	1

となります。5V が 2 進数の 1 を表しています。



この例から分かるように、2 進数の各桁は各ビット(bit 0, bit 1, bit 2, ・・・)を表し、桁数は情報の量(単位:ビット)を表します。

2. 小数の表現

10 進数での小数の表現を考えます。整数の場合と同様に、

$$(0.1235)_{10} = (1\times10^{-1} + 2\times10^{-2} + 3\times10^{-3} + 5\times10^{-4}) \quad (1)$$

と表現されます。小数点を境に、右側の指数部が-1, -2, -3 と 1 づつ減少していきます。これは、先に示した整数の場合と全く同じです。簡単ですね。

当然、

$$\begin{aligned}
10^{-1} &= \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0.1 \\
10^{-2} &= \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01 \\
10^{-3} &= \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001 \\
&\vdots \\
10^{-N} &= \frac{1}{10^N}
\end{aligned} \quad (2)$$

は分かっていますよね。

3. 基数の変換

3.1 変換(2 進数小数→10 進数小数)

2 進数での少数の表記も、10 進数の場合と同様です。だから、2 進数少数を 10 進数少数に変換するのは簡単です。たとえば、

$$\begin{aligned}
(0.10101)_2 &= (1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3} + 0\times2^{-4} + 1\times2^{-5}) \\
&= (1\times0.5 + 0\times0.25 + 1\times0.125 + 0\times0.0625 + 1\times0.03125)_{10} \\
&= (0.5 + 0.125 + 0.03125)_{10} \\
&= (0.65625)_{10}
\end{aligned} \quad (3)$$

となります。当然、

$$\begin{aligned}
2^{-1} &= \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0.5 \\
2^{-2} &= \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25 \\
2^{-3} &= \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0.125 \\
&\vdots \\
2^{-N} &= \frac{1}{2^N}
\end{aligned} \quad (4)$$

は分かっていますよね。

3.2 変換 (10 進数小数→2 進数小数)

つぎに逆を考えましょう。たとえば、先ほどの 0.65625 を

$$(0.65625)_{10} = (a_1 \times 2^{-1} + a_2 \times 2^{-2} + a_3 \times 2^{-3} + a_4 \times 2^{-4} + a_5 \times 2^{-5} + \cdots) \qquad (5)$$

と表現したいのです。それぞれ、a_n を求めなくてはなりません。そこで、両辺×2 を実行してみましょう。

$$(1.3125)_{10} = (a_1 \times 2^{0} + a_2 \times 2^{-1} + a_3 \times 2^{-2} + a_4 \times 2^{-3} + \cdots) \qquad (6)$$

となります。この式の両辺の整数部、および小数部同志は等しいので、

$$\begin{aligned} &(1)_{10} = a_1 \\ &(0.3125)_{10} = (a_2 \times 2^{-1} + a_3 \times 2^{-2} + a_4 \times 2^{-3} + \cdots) \end{aligned} \qquad (7)$$

となります。$(1)_{10}=(1)_2$ なので、$a_1=1$ となります。同じように、残りの小数部分を 2 倍すると、

$$(0.625)_{10} = (a_2 \times 2^{0} + a_3 \times 2^{-1} + a_4 \times 2^{-2} + a_5 \times 2^{-3} + \cdots) \qquad (8)$$

となります。同様に、整数部、および小数部同志は等しいので、

$$\begin{aligned} &(0)_{10} = a_2 \\ &(0.625)_{10} = (a_3 \times 2^{-1} + a_4 \times 2^{-2} + a_5 \times 2^{-3} + \cdots) \end{aligned} \qquad (9)$$

となります。したがって、$a_2=0$ です。次々に、同じ計算を進めると、
となります。

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} (1.25)_{10} = (a_3 \times 2^{0} + a_4 \times 2^{-1} + a_5 \times 2^{-2} + a_6 \times 2^{-3} + \cdots) \\ \quad \Downarrow \\ (1)_{10} = a_3 \\ (0.25)_{10} = (a_4 \times 2^{-1} + a_5 \times 2^{-2} + a_6 \times 2^{-3} + \cdots) \end{cases} \\
&\begin{cases} (0.5)_{10} = (a_4 \times 2^{0} + a_5 \times 2^{-1} + a_6 \times 2^{-2} + a_7 \times 2^{-3} + \cdots) \\ \quad \Downarrow \\ (0)_{10} = a_4 \\ (0.5)_{10} = (a_5 \times 2^{-1} + a_6 \times 2^{-2} + a_7 \times 2^{-3} + \cdots) \end{cases} \\
&\begin{cases} (1.0)_{10} = (a_5 \times 2^{0} + a_6 \times 2^{-1} + a_7 \times 2^{-2} + a_8 \times 2^{-3} + \cdots) \\ \quad \Downarrow \\ (1)_{10} = a_5 \\ (0.0)_{10} = (a_6 \times 2^{-1} + a_7 \times 2^{-2} + a_8 \times 2^{-3} + \cdots) \end{cases}
\end{aligned} \qquad (10)$$

最後に、小数部がゼロとなったので計算は、完了です。以上をまとめると

$$
\begin{aligned}
(0.65625)_{10} &= (a_1 \times 2^{-1} + a_1 \times 2^{-2} + a_2 \times 2^{-3} + a_3 \times 2^{-4} + a_4 \times 2^{-5} + \cdots) \\
&= (1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5}) \qquad (11) \\
&= (0.10101)_2
\end{aligned}
$$

です。要するに、小数部を 2 倍して、その整数部を書いていけばよいのです。
　よく使われるのは、図 2 のようにして計算します。2 倍して、整数部を書き出して、小数部を再度 2 倍します。これを繰り返すと、10 進数小数が、2 進数小数に変換できます。
　10 進数の 0.1 は循環小数ではありませんが、2 進数にすると、

$$
(0.1)_{10} = (0.00011001100110011001 1\cdots)_2 \qquad (11)
$$

と循環小数になります。通常は、途中まで(必要な精度まで)で、計算を打ち切ります。

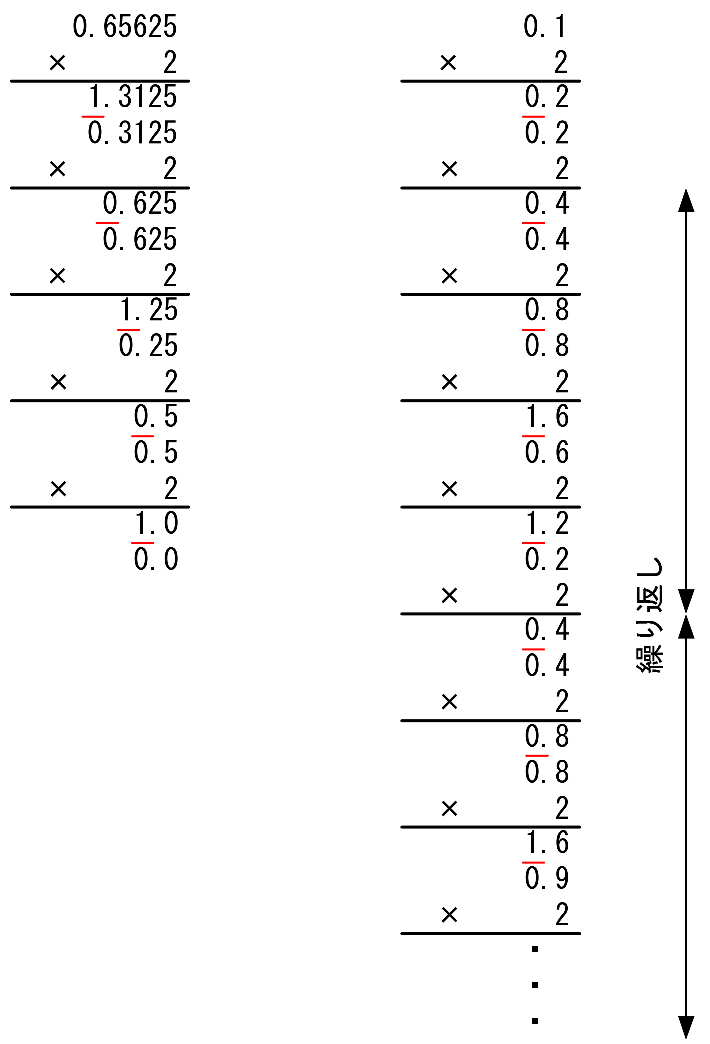


図 2 小数の基数変換(10 進数→2 進数)