練習問題解答

山本昌志*

平成 16 年 10 月 27 日

1　高階の常微分方程式

高階の常微分方程式を連立 1 階微分方程式に書き換えるという問題です。それにより高階の微分方程式でも、ルンゲ・クッタ法が使えるようになります。

1.1　問題 (1)

$$y'' + 3y' + 5y = 0 \tag{1}$$

これは 2 階の常微分方程式ですから、2 元 1 階常微分方程式に変形できるはずです。まず、

$$\begin{cases} y_0(x) = y(x) \\ y_1(x) = y'(x) \end{cases} \tag{2}$$

と変数の変換をします。この変数変換により、

$$\frac{dy_0}{dx} = y_1 \tag{3}$$

が直ちに導けます。これは求める 2 つの式の 1 つになります。

もう一つは、問題で与えられている式に変数変換の式 (**??**) を適用します。すると、

$$y'' + 3y' + 5y = 0 \tag{4}$$

$$\frac{dy_1}{dx} + 3y_1 + 5y_0 = 0 \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

となります。ここでは、

$$\frac{dy_1}{dx} = y'' \tag{7}$$

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

を利用したことを忘れないでください。

したがって、式 (**??**), (**??**) から、連立方程式は、

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = -5y_0 - 3y_1 \end{cases} \tag{8}$$

となります。これが問題に対する解答です。

1.2　問題 (2)

$$y'' + 6y' + y = 0 \tag{9}$$

問題 1 と同じ方法で式を変形します。すると、

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = -y_0 - 6y_1 \end{cases} \tag{10}$$

を導くことができます。

1.3　問題 (3)

$$5y'' + 2xy' + 3y = 0 \tag{11}$$

これも問題 (1) と同じです。ただ、式の中に x が入っているだけです。問題 (1) の式 (**??**) と同じ変数変換すると、問題の式は、

$$5\frac{dy_1}{dx} + 2xy_1 + 3y_0 = 0 \tag{12}$$

と変形できます。したがって、求める連立方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = -\dfrac{1}{5}(3y_0 + 2xy_1) \end{cases} \tag{13}$$

となります。

1.4　問題 (4)

$$y''' + y' + xy = 0 \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

これは 3 階の常微分方程式ですが、考え方は 2 階の場合と全く同じです。変数の変換が

$$\begin{cases} y_0(x) = y(x) \\ y_1(x) = y'(x) \\ y_2(x) = y''(x) \end{cases} \tag{16}$$

となるだけです。この変数変換によって、

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \end{cases} \tag{17}$$

を直ちに導くことができます。問題の式にこれらを代入すると

$$\frac{dy_2}{dx} + y_1 + xy_0 = 0 \tag{18}$$

となります。式 (**??**), (**??**) から求める連立方程式は、

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -xy_0 - y_1 \end{cases} \tag{19}$$

です。

1.5 問題 (5)

$$5y'' + y' + y = \sin(\omega x) \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

右辺に $\sin(\omega x)$ があり非同次微分方程式となっていますが、新しいことは何もありません。問 (1) と同じように変数変換して、計算するだけです。解答は以下の通りです。

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{\sin(\omega x) - y_0 - y_1}{5} \end{cases} \tag{22}$$

1.6 問題 (6)

$$xy'' + y' + y = e^x \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

これも問 (5) とほとんど同じです。

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{e^x - y_0 - y_1}{x} \end{cases} \tag{25}$$

1.7　問題 (7)

$$5y''y' + y' + y = 0 \tag{26}$$

$$\tag{27}$$

非線形項 $y''y'$ がありますが、同じ考え方で式の変形ができます。

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = -\dfrac{y_0 + y_1}{5y_1} \end{cases} \tag{28}$$

1.8　問題 (8)

$$y''y' + x^2y'y + y = 0 \tag{29}$$

$$\tag{30}$$

これも、問 (7) と同じ非線形の微分方程式です。

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = -\dfrac{x^2y_0y_1 + y_0}{y_1} \end{cases} \tag{31}$$