

非線型方程式の数値計算法

山本昌志*

2004年8月25日

1 本日の学習内容

1.1 授業のテーマ

本日の授業は、非線型方程式の数値解法について学習する。具体的には、二分法とニュートン法、はさみうち法、割線法(セカント法)という非線形方程式の近似解を求める方法について、原理を説明する。

この4つ方法のうち、最初の2つが重要で、講義ではそのイメージをつかむことに努めよ。イメージがつかめると、その計算は簡単に出来るであろう。

1.2 授業のゴール

数値計算の授業と言うことでは、以下のゴールを設定する。

- 4種類の計算方法のイメージがつかめる。グラフにより、計算方法が説明できる。
- 計算方法のフロチャートが書ける。
- それぞれ計算方法に優劣があり、問題により使い分けを行う必要があることが理解できる。
- C言語でプログラムが作成できる。

2 非線型方程式の概要

ここでは、数値計算により方程式の解を求める方法を学習する。次の方程式

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

の根 x を求める。方程式の右辺がゼロでない場合は、左辺へ移項して式(1)の形にできる。

具体的な問題で、非線形方程式を考えることにしよう。たとえば、方程式

$$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0 \tag{2}$$

*国立秋田工業高等専門学校 電気工学科

の根を求める。この解析解を求めるのは、ほとんど不可能であろう。こらえ性のない私なんかは、すぐにコンピューターで計算を始める。本日は、コンピューターでこの非線形方程式の根、実際は近似解を求める方法を学習するのである。ちなみにこの方程式の根は、

$$x_1 = 1 - 2 \left[\frac{2}{1 + \sqrt{33}} \right]^{1/3} + \left[\frac{1}{2} (1 + \sqrt{33}) \right]^{1/3} \quad (3)$$

$$x_2 = 1 + (1 + \sqrt{3}i) \left[\frac{2}{1 + \sqrt{33}} \right]^{1/3} - \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}i) \left[\frac{1}{2} (1 + \sqrt{33}) \right]^{1/3} \quad (4)$$

$$x_2 = 1 + (1 - \sqrt{3}i) \left[\frac{2}{1 + \sqrt{33}} \right]^{1/3} - \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}i) \left[\frac{1}{2} (1 + \sqrt{33}) \right]^{1/3} \quad (5)$$

と分かっている¹。それにしても、これらの根は良く似ている。不思議なものである。複素平面で考えると、これらが似ているのも分かるような気がする。

ここでは数値計算法により、実数解、すなわち x_1 を求める。むろん、複素数解を求めることも可能であるが、少し難しくなる²。実際に、プログラムを作成する前に、実数解の近似値を求めておくのが良いだろう。それは、

$$x_1 \simeq 1.1659055841222127171 \dots \quad (6)$$

となる。

式 (2) は 3 次方程式であるが、ここで用いる数値計算のテクニックで解ける問題はべき乗の多項式とは限らない。計算に用いれる領域が連続であれば、どんな方程式でも解ける。三角関数や指数関数、分数の形でも関係なく解ける。

次節からは、先に述べた非線形方程式の近似解を求める 4 通りの計算テクニック (二分法, ニュートン法, はさみうち法, 割線法) を示す。

いずれの方法も、 $y = f(x)$ の x 軸と交わる点、即ち $f(x) = 0$ を反復 (ループ) 計算を用いて探している。式 (2) であれば、 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 8$ として、 x 軸との交点を計算するのである。この関数 $f(x)$ を図 11 にしめす。 x 軸の交点がこの方程式の解となっているのは、中学生の時に学習したとおりである。

¹私は、数式処理システム Mathematica を利用して解いた。

²複素数解については、8.1 節に示す。

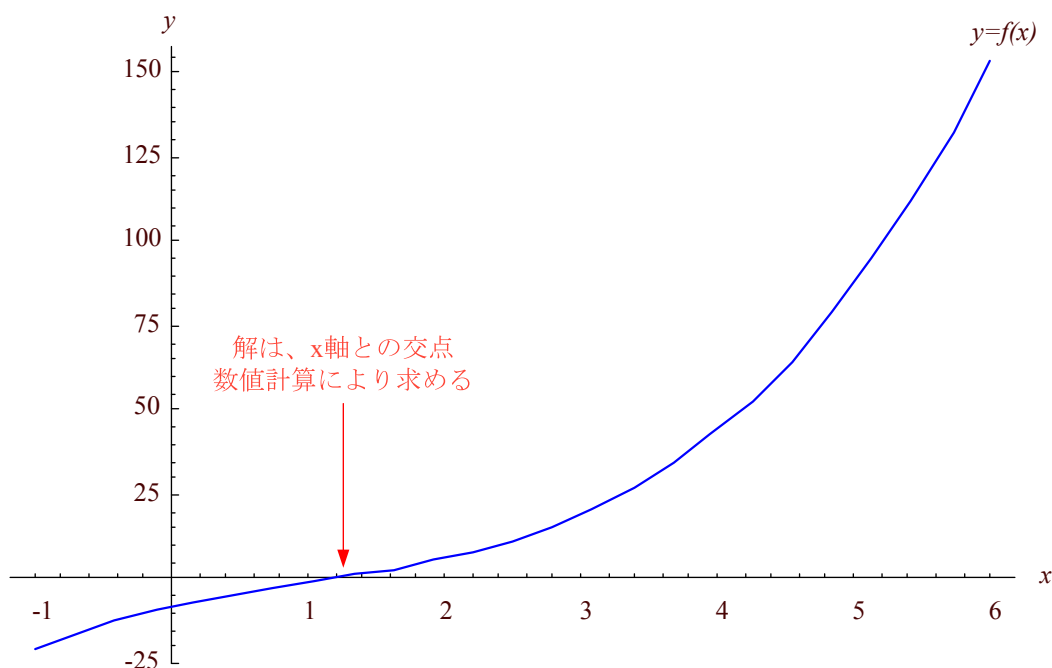


図 1: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 8$ の関数。x 軸との交点が解である。

3 二分法 (bisection method)

3.1 計算方法

二分法の原理は非常に単純であるが、この方法は場合によっては非常に強力である。これは、閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ の値が、

$$f(a)f(b) < 0 \tag{7}$$

ならば、 $f(\alpha) = 0$ となる α が区間 $[a, b]$ ということを使っている。このことは、中間値の定理から保証されるが、常識的に考えてあたりまえである。ただ、連続な区間で適用できることを忘れてはならない。

実際の数値計算は、 $f(a)f(b) < 0$ であるような 2 点 $a, b (a < b)$ から出発する。そして、区間 $[a, b]$ を 2 分する点 $c = (a + b)/2$ に対して、 $f(c)$ を計算を行う。 $f(c)f(a) < 0$ ならば b を c と置き換え、 $f(c)f(a) > 0$ ならば a を c と置き換える。絶えず、区間 $[a, b]$ の間に解があるようにするのである。この操作を繰り返して、区間の幅 $|b - a|$ が与えられた値 ε よりも小さくなったならば、計算を終了する。解へ収束は収束率 $1/2$ の一次収束となる。

実際にこの方法で式 (2) を計算した結果を図 2 に示す。この図より、 $f(a)$ と $f(b)$ の関係の式 (7) を満たす区間 $[a, b]$ が $1/2$ ずつ縮小していく様子が見える。この方法の長所と短所は、以下の通りである。

長所 閉区間 $[a, b]$ に解があれば、必ず解に収束する。間違いなく解を探すので、ロバスト (robust: 強靱な) な解法と言われている。次に示すニュートン法とは異なり、連続であればどんな形の関数でも解に収

束するので信頼性が高いのである。さらに、解の精度も分かり便利である。解の誤差は、区間の幅 $|b - a|$ 以下である。

短所 収束が遅い (図 8)。

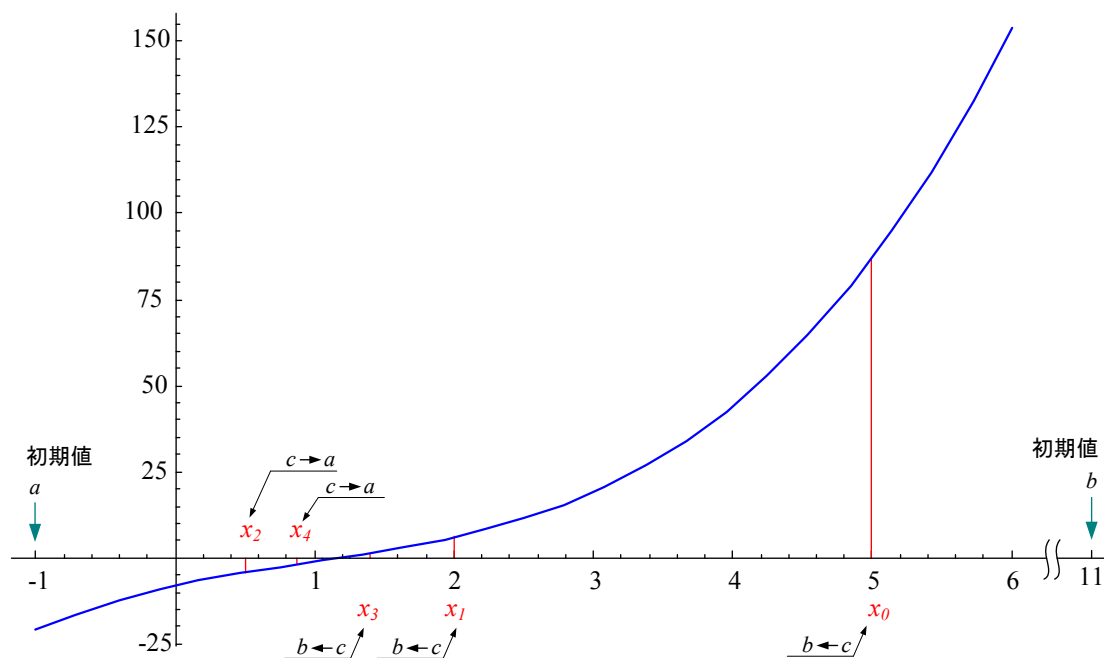


図 2: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 8$ の実数解を二分法で解散し、その解の収束の様子を示している。初期値は $a = -1, b = 11$ として、最初の解 $c = x_0 = 5$ が求まり、順次より精度の良い x_1, x_2, x_3, \dots が求まる。それが、解析解 $x = 1.1659\dots$ (x 軸との交点) に収束していく様子が分かる。

3.2 フローチャート

関数はあらかじめ、プログラム中に書くものとする。更に、計算を打ち切る条件もプログラム中に書くものとする。そうすると、図 3 のような二分法のフローチャートが考えられる。

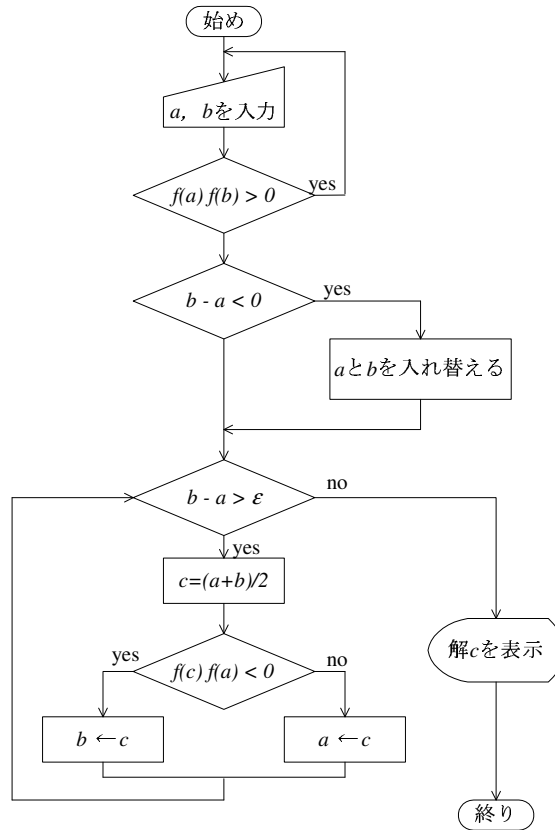


図 3: 二分法のフローチャート

4 ニュートン法 (Newton's method)

4.1 計算方法

関数 $f(x)$ のゼロ点 α に近い近似値 x_0 から出発する。そして、関数 $f(x)$ 上の点 $(x_0, f(x_0))$ での接線が、 x 軸と交わる点を次の近似解 x_1 とする。そして、次の接線が x 軸と交わる点を次の近似解 x_2 とする。同じことを繰り返して x_3, x_4, \dots を求める (図 4)。この計算結果の数列 $(x_0, x_2, x_3, x_4, \dots)$ は初期値 x_0 が適当であれば、真の解 α に収束することは図より明らかであろう。

実際にこの数列を計算するためには、漸化式が必要である。図の用にすると、関数 $f(x)$ 上の点 $(x_i, f(x_i))$ の接線を引き、それと x 軸と交点 x_{i+1} になる。まずは、 x_{i+1} を求めることにする。点 $(x_i, f(x_i))$ を通り、傾きが $f'(x_i)$ の直線の方程式は、

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i) \quad (8)$$

である。図 4 より、 $y = 0$ の時の x の値が x_{i+1} になることが分かる。したがって、 x_{i+1} は、

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (9)$$

となる。これで、 x_i から x_{i+1} が計算できる。これをニュートン法の漸化式と言う。この漸化式を用いれば、次々とより精度の良い近似解を求めることができる。

計算の終了は、

$$\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} \right| < \varepsilon \quad (10)$$

の条件を満たした場合とするのが一般的である。 ε は計算精度を決める定数で、非常に小さな値である。これ以外にも計算の終了を決めることは可能なので、状況に応じて、計算の打ち切り方法を決めればよい。実際に式 (2) を計算した結果を図 4 に示す。接線との交点が解に近づく様子が見られる。

ニュートン法を使う上で必要な式は、式 (9) のみである。計算に必要な式は分かっていたが、数列がどのように真の解 α に収束するかを考える。 x_{i+1} と真値 α の差の絶対値、ようするに誤差を計算する。 $f(\alpha) = 0$ を忘れないで、テイラー展開を用いて、計算を進めると

$$\begin{aligned} |\alpha - x_{i+1}| &= \left| \alpha - x_i + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right| \\ &= \left| \alpha - x_i + \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \left[1 - \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'^2(\alpha)} \right] (x_i - \alpha) + O((\alpha - x_i)^2) \right| \\ &= |O((\alpha - x_i)^2)| \end{aligned} \quad (11)$$

となる。 $i + 1$ 番目の近似値は、 i 番目に比べて 2 乗で精度が良くなるのである。これを、二次収束と言い、非常に早く解に収束する。例えば、 10^{-3} の精度で近似解が得られているとすると、もう一回式 (9) を計算するだけで、 10^{-6} 程度の精度で近似解が得られるということである。一次収束の二分法よりも、収束が早いことが分かる。

ニュートン法の特徴をまとめると次のようになる。

長所 初期値が適当ならば、収束が非常に早い (図 8)。

短所 初期値が悪いと、収束しない (図 9)。収束しない場合があるので、反復回数の上限を決めておく必要がある。

ニュートン法は複素数にも適用できる。また、連立方程式にも容易に拡張できる。諸君が学習してきた数は、自然数 \rightarrow 整数 \rightarrow 有理数 \rightarrow 無理数 \rightarrow 複素数 \rightarrow ベクトル \rightarrow 行列 $\rightarrow \dots$ と拡張されてきた。しかし、どのような数であれ、演算規則は非常に似通っていることは今まで経験してきたとおりである。このことから、実数で成り立つ方法は、複素数や行列にも成り立つことが予想できる。このように考えると、ニュートン法が連立方程式や複素数に拡張できることも不思議ではない。

これは少し高度な内容なので、8 節におまけで載せておく。たぶん、諸君の中の何人かは一瞬にして実数の近似解を求めるニュートン法を理解したと思う。これまでの話が理解できた者は、8 節を勉強することを勧める。

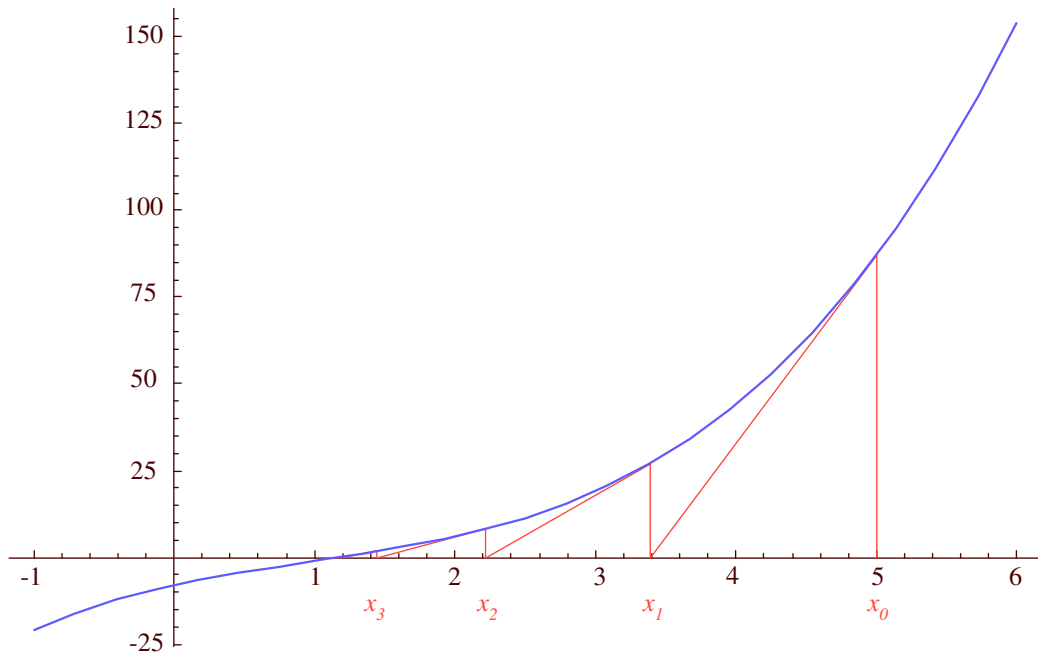


図 4: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 8$ の実数解をニュートン法で計算し、解の収束の様子を示している。初期値 $x_0 = 5$ から始まり、接線と x 軸の交点からより精度の高い回を求めている。

4.2 フローチャート

二分法同様、関数と計算を打ち切る条件はプログラム中に書くものとする。そうすると、図 5 のようなニュートン法のフローチャートが考えられる。

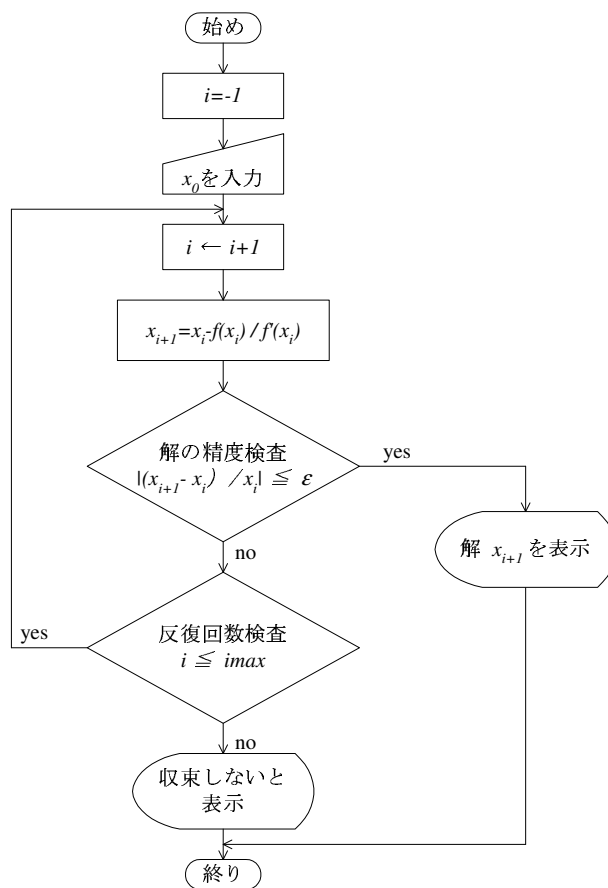


図 5: ニュートン法のフローチャート

5 はさみうち法

5.1 計算方法

二分法は収束が遅いので、それを少し改良した方法である。とはいっても、初期値が悪いと二分法よりも収束が遅いこともある。初期値が解に近ければ、収束は早くなる。二分法では c を $[a, b]$ の中点とした。その代わりに、2点 $(a, f(a))$ と $(b, f(b))$ を結ぶ直線が x 軸と交わる点を c とするのがはさみうち法である。 x 軸と交点 c は、

$$c = \frac{af(a) - bf(b)}{f(b) - f(a)} \quad (12)$$

となる。ゼロ点 α は常に区間 $[a, b]$ に存在する。次々に更新される c はゼロ点 α に収束するが、区間の幅 $|b - a|$ はゼロに収束しない。ある与えられた値 ε に対して、 $|f(c)| < \varepsilon$ となれば反復を停止させる。実際に式 (2) を計算した結果を図 6 に示す。交点が解に近づくことが理解できるはずである。

フロチャートは、各自考えよ。

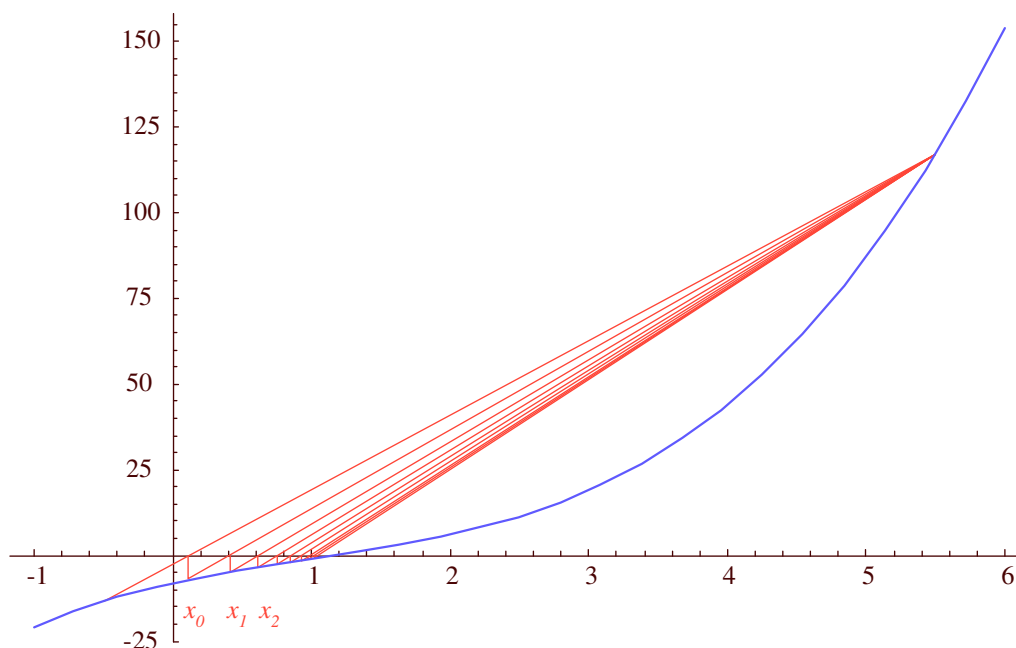


図 6: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 8$ の実数解をはさみうち法で計算で、その解の収束の様子を示している。初期値 $a = -0.5, b = 5.5$ から出発している。x 軸との交点 $x_0, x_1, x_2, x_3 \dots$ が解析解 $x = 1.1659 \dots$ に収束していく様子が分かる。

6 割線法

6.1 計算方法

ニュートン法とよく似た方法である。ニュートン法の接線の代わりに、2点 $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ と $(x_i, f(x_i))$ を結ぶ直線 (割線) を使う。この直線が x 軸と交わる点を、次の近似解 x_{i+1} とする。はさみうち法とは異なり、 $f(x_i)$ の符号は考慮しない。x 軸と交わる交点は、

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \quad (13)$$

である。この式は、ニュートン法の漸化式 (9) とよく似ている。初期値 x_0, x_1 から始めて、漸化式 (13) を使って、次々に x_2, x_3, \dots を計算するのである。 $i \rightarrow \infty$ で、 $x_i \rightarrow \alpha$ に収束する。

ニュートン法では 1 回の反復当たり $f(x_i)$ と $f'(x_i)$ の 2 回の計算が必要なことに対して、割線法で新たに計算するのは、 $f(x_i)$ のみである。したがって、ニュートン法よりも計算の手間が省け、計算速度が速くなる。実際にこの方法で式 (2) を計算した結果を図 7 に示す。交点が解に近づくことが理解できるであろう。

フロチャートは、各自考えよ。

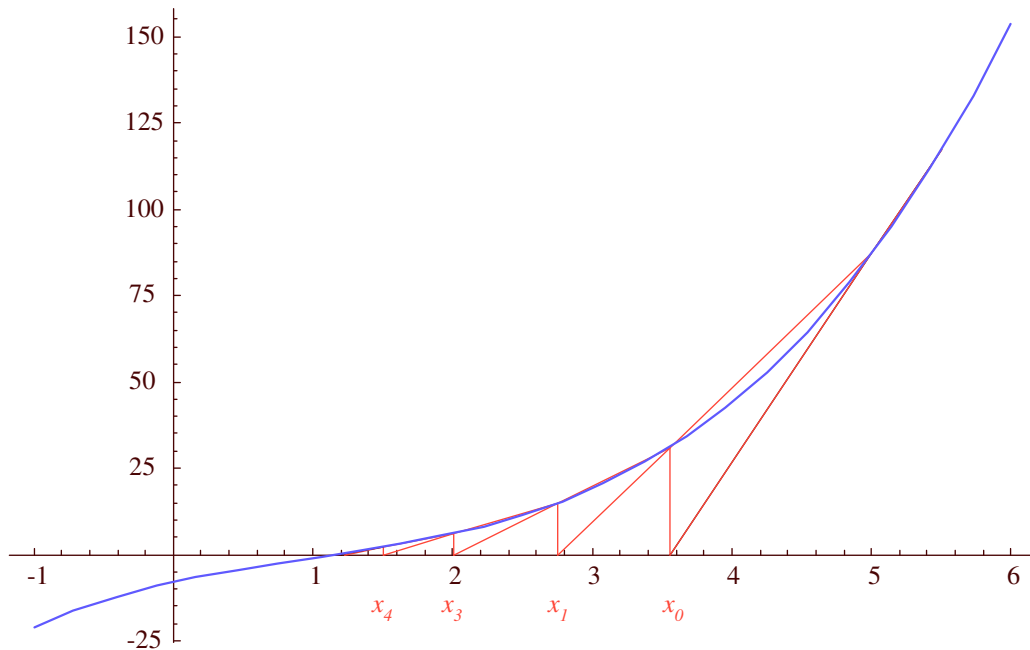


図 7: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 8$ の実数解を割線法で計算し、その解の収束の様子を示している。初期値 $x_{-2} = 5.5, x_{-1} = 5.0$ から出発して、計算を進めている。x 軸との交点 $x_0, x_1, x_2, x_3 \dots$ が解析解 $x = 1.1659 \dots$ に収束していく様子が分かる。

7 それぞれの方法の比較

7.1 解への収束速度

図 8 に、これまでに示した 4 つの方法の解への近づき具合を示す。ニュートン法と割線法が収束が早いことが分かる。先に示した通り二次収束になっている。一方、二分法とはさみうち法は一次収束であることがグラフより分かる。二分法は、10 回の計算で、 $2^{-10} = 1/1024$ 程度になっていることに気づいてほしい。はさみうち法は、二分法を改良したにもかかわらず、それよりも収束の速度が遅くなっている。これは、初期値が悪いため、それを改善すれば、二分法よりも早く収束するはずである。

ニュートン法や割線法は収束が早く良さそうであるが、次に示すように解へ収束しない場合があり問題を含んでいる。問題に応じて、計算方法を使い分けるべきである。

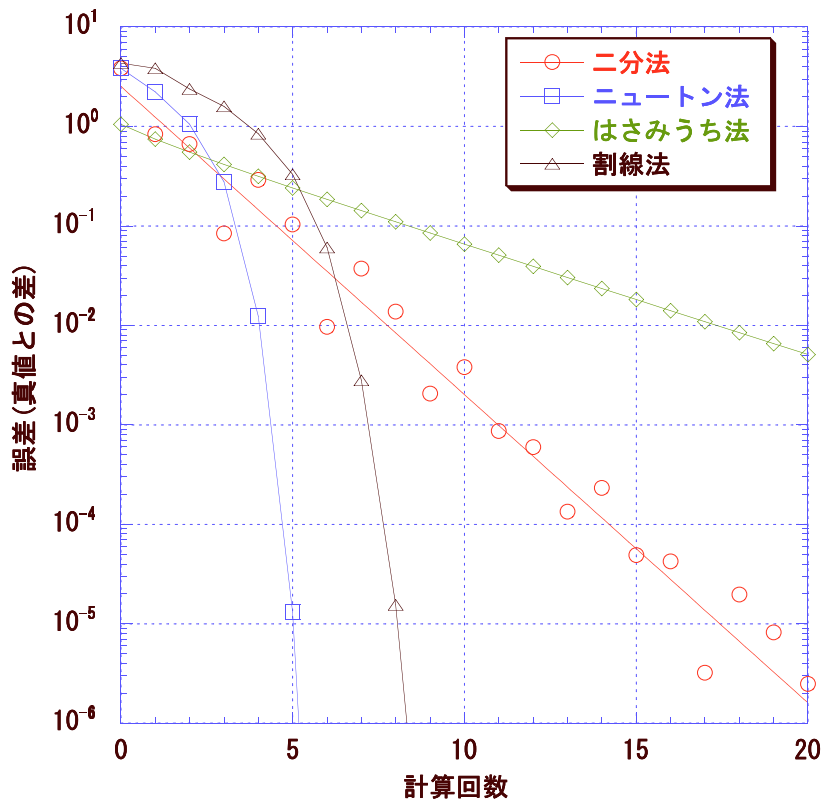


図 8: 計算回数 (反復回数) と誤差の関係

7.2 ニュートン法の問題点

アルゴリズムから、二分法とはさみうち法は解に必ず収束する³。これらの方法は、収束のスピードが遅いのが欠点である。一方、ニュートン法と割線法は収束するとは限らない。初期条件に依存する場合がある。厳密にその条件を求めるのは大変なので、初期条件により収束しない実例を示すことにする。

非線形方程式

$$3 \tan^{-1}(x - 1) + \frac{x}{4} = 0 \quad (14)$$

を計算することを考える。これは、初期値のより、収束しない場合がある。例えば初期値 $x_0 = 3$ の場合、図 9 のように収束しない⁴。これを初期値 $x_0 = 2.5$ にすると図 10 のように収束する。

このようにニュートン法は解に収束しないで、振動する場合がある。こうなると、プログラムは無限ループに入り、永遠に計算し続ける。これは資源の無駄遣いなので、慎むべきである。通常は、反復回数の上限を決めて、それを防ぐ。ニュートン法を使う場合は、この反復回数の上限は必須である。

³収束すると私は信じています。厳密な証明は数学者に任せましょう。

⁴発散だと思う。もしかしたら振動かも。私は興味がありませんので、発散か振動か誰か証明してください。

ニュートン法で収束する必要条件が分かればこの問題は解決する。しかし、それを探すのは大変である。というか私には分からない。一方、十分条件は簡単にわかる。閉区間 $[a, b]$ で、 $f(a) < 0, f(b) > 0$ のような関数を考える。このとき、

- 常に $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ で、初期値が $x_0 = b$ の場合
- 常に $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ で、初期値が $x_0 = b$ の場合

は、必ず収束する。ニュートン法の図から明らかである。 $f(a) > 0, f(b) < 0$ の場合は、 $f(x)$ に-1倍すれば、先の十分条件を考えることができる。

実際には収束しない場合のほうが稀であるので、ニュートン法は非常に強力な非線型方程式の解法である。ただ、反復回数を忘れないことが重要である。また、二分法と組み合わせて使うことも考えられる。

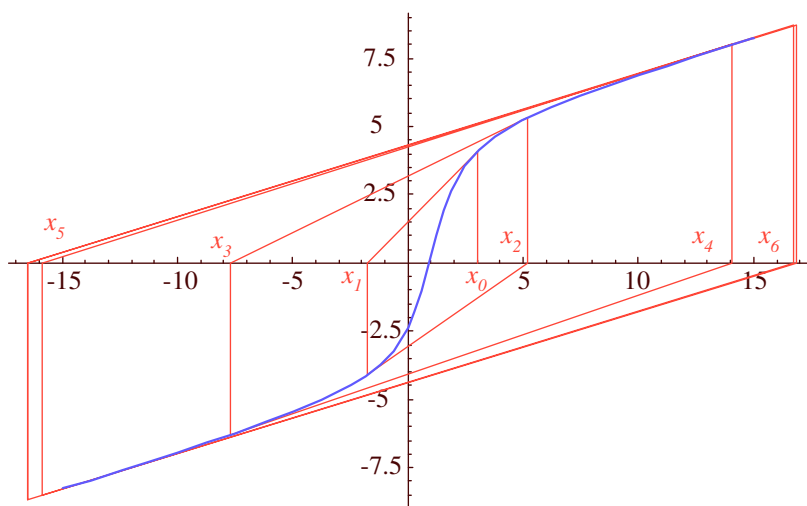


図 9: ニュートン法で解が求まらない場合

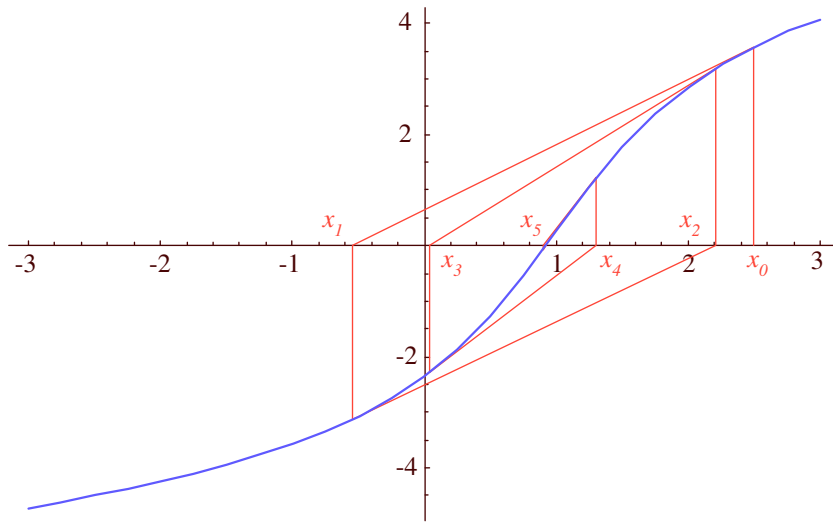


図 10: ニュートン法で解が求まる場合

8 より進んだ内容 (ニュートン法)

4節では、ニュートン法により、実数解を求める方法を学習した。そのとき、連立方程式や複素数解が求められると述べた。そこで、諸君の将来のために、複素数解や連立方程式を求める方法を示しておく。内容は、実数解を求める方法とほとんど同じであるが、少しばかり概念を拡張する必要がある。いままでの学習内容を十分理解していれば、これから述べることは分かるであろう。理解できないにしても、いずれは理解できるものと期待している。内容が理解できなくても、なにか面白そうだと思ってもらえれば、十分である。さあ、実数解が求められた者は、より難しい非線形方程式の近似解を求めよう。

8.1 非線形方程式の複素数解

8.1.1 実数解の場合の復習

複素数に進む前に実数のニュートン法の復習を行う。4節では、図によるニュートン法の説明を行い、漸化式を示した。この方法は、直感的で分かりやすいが、複素数解や非線形連立方程式を考える場合は無理がある。図で示すことができるのは2次元までで、それ以上になると図に示すことが不可能であるからである。そこで、別のアプローチから漸化式を導くことにする。異なった説明をしているようであるが、その根本精神は全く同じで、

- 解に近いところでは、直線で近似できる⁵。

ということである。

⁵ 解に近い必要はなく、実際には、狭い範囲は直線で近似できるということである。特異点は別。

それでは、漸化式を求めることにする。いつものように、 $f(x) = 0$ の方程式の解を $x = \alpha$ とする。即ち、 $f(\alpha) = 0$ である。そして、 i 番目の近似解を x_i とする。ここから、 Δx だけ移動したところの値は、

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_i)\Delta x^2 + \dots$$

ただし、 Δx が小さい場合

$$\simeq f(x_i) + f'(x_i)\Delta x \tag{15}$$

となる。もし、 $f(x_i + \Delta x) = 0$ 、即ち、 $\alpha = x_i + \Delta x$ となるように、 Δx を選ぶことができれば、解の計算は簡単である。この場合、式 (15) の最後の式から、

$$\Delta x \simeq -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{16}$$

となる。したがって、 $\alpha = x_i + \Delta x$ から、次の近似解は

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{17}$$

となる。前回、図により求めた漸化式と同じである。異なる説明であったが、内容はまったく同じであることを理解して欲しい。

8.1.2 複素数解の場合

漸化式 実数とまったく同じ議論が、複素数でも成り立つ。ただし、複素関数で重要な特異点付近では、この方法は使えない。テイラー級数ではなく、ローラン級数の -1 乗よりも小さい項が重要となるからである。実数の場合も、特異点はだめなのと同じである。

実数とまったく同じ議論より、方程式

$$w(z) = 0 \tag{18}$$

の近似解は、漸化式

$$z_{i+1} = z_i - \frac{w(z_i)}{w'(z_i)} \tag{19}$$

より求めることができる。この式の算出は、先ほどの実数の場合と全く同じである。

前回とは異なり、実数の場合の漸化式をグラフを用いなくて説明したのは、複素数に拡張するためである。複素数のグラフは大変である。

プログラム作成のために つい最近まで、FORTRAN と違って C 言語では複素数をそのまま扱うことができなかった。これが C 言語の弱点になっていたが、現在ではそれが克服された。FORTRAN 同様に複素数もそのまま扱えるのである。これは非常にありがたい。

C 言語で複素数を使うためには、教科書 p.471 に書かれているようにすればよい。すなわち、

```
#include <complex.h>
```

とヘッダーファイルをインクルードし、変数の型を

```
float complex
double complex
long double complex
```

のようにする。通常は、`double complex` を使うこと。

四則演算は特に気にすることもなく、普通に演算子 (+, -, *, /) が使える。また、表 1 のような関数が用意されている。

表 1: `complex.h` で定義されている関数。関数の引数と戻り値は同じ型である。

関数名	倍精度	単精度	拡張倍精度
三角関数	<code>csin()</code>	<code>csinf()</code>	<code>csinl()</code>
	<code>ccos()</code>	<code>ccosf()</code>	<code>ccosl()</code>
	<code>ctan()</code>	<code>ctanf()</code>	<code>ctanl()</code>
逆三角関数	<code>casin()</code>	<code>casinf()</code>	<code>casinl()</code>
	<code>cacos()</code>	<code>cacosf()</code>	<code>cacosl()</code>
	<code>catan()</code>	<code>catanf()</code>	<code>catanl()</code>
双曲線関数	<code>csinh()</code>	<code>csinhf()</code>	<code>csinhl()</code>
	<code>ccosh()</code>	<code>ccoshf()</code>	<code>ccoshl()</code>
	<code>ctanh()</code>	<code>ctanhf()</code>	<code>ctanhl()</code>
逆双曲線関数	<code>casinh()</code>	<code>casinhf()</code>	<code>casinhl()</code>
	<code>cacosh()</code>	<code>cacoshf()</code>	<code>cacoshl()</code>
	<code>catanh()</code>	<code>catanhf()</code>	<code>catanhl()</code>
指数関数	<code>cexp()</code>	<code>cexpf()</code>	<code>cexpl()</code>
自然対数	<code>clog()</code>	<code>clogf()</code>	<code>clogl()</code>
絶対値	<code>cabs()</code>	<code>cabsf()</code>	<code>cabsl()</code>
平方根	<code>csqrt()</code>	<code>csqrtf()</code>	<code>csqrtl()</code>
べき乗	<code>cpow()</code>	<code>cpowf()</code>	<code>cpowl()</code>
実部	<code>creal()</code>	<code>crealf()</code>	<code>creall()</code>
虚部	<code>cimag()</code>	<code>cimagf()</code>	<code>cimagl()</code>
偏角	<code>carg()</code>	<code>cargf()</code>	<code>cargl()</code>
複素共役	<code>conj()</code>	<code>conjf()</code>	<code>conjl()</code>
リーマン球の射影	<code>cproj()</code>	<code>cprojf()</code>	<code>cprojl()</code>

8.2 非線型連立方程式の実数解 (2 元の場合)

前節では、ニュートン法による複素数の近似解を求める方法を示した。「非線型連立方程式」の近似解が求めれば、概ねニュートン法の学習は終わりである。ちょっと難しいが、ニュートン法の学習の仕上げとして、「非線型連立方程式」の実数解を求める方法を示す。非線型連立方程式の複素数解を求めることが残っているが、この講義では示さない。今までのことを理解していれば、その方法も直ぐに理解できるであろう。興味のある人、あるいは必要に迫られた人は、自分で計算方法を考えてみよう。

8.2.1 非線型連立方程式とは

今まで、諸君は、「非線型の方程式」あるいは「線形の連立方程式」は解いたことがある。例えば、前者は、

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (20)$$

のようなものである。後者の例は、

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 10 \\ x + y + z = 6 \\ x + 2y + z = 11 \end{cases} \quad (21)$$

である。非線型方程式は未知数が 2 次以上のものをいい、連立方程式は未知数が 2 個以上のものをいうのである。非線型とは、直線でないという意味である。未知数が 2 次以上のもの、例えば x^3 が式に含まれると、それは直線にならないので、非線型方程式になる。直線でないという意味からも、 $\sin x$ も非線型方程式を形づくる。この場合、 x の次数は無限である。

複素数解まで含めると、非線型な n 次方程式には n 個の解がある。線形な連立方程式、 n 元 1 次方程式の場合、係数行列が特異でない限り、1 個の解がある。では、非線形な連立方程式、 n 元 m 次方程式の場合、複素数を含めた解の数は m 個のように思えるが、正しいのだろうか？。数学の先生に聞くと、正しいということである。

また、方程式の数と未知数の数は一致しなくてはならないのは、通常の連立方程式と同じである。それらの数が同じでも、線形連立方程式では、係数行列の行列式がゼロの場合、解は一意に決まらない。非線型の連立方程式の場合、これはどのような場合に対応するのだろうか？。私には、分からない。かなり難しく興味深い問題のように思えるが、ここではそのことは考えないことにする。

8.2.2 非線型連立方程式の例

実例を使って、計算方法を示す。例として

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 - 3 = 0 \\ \sin x + e^{y-1} - 1 = 0 \end{cases} \quad (22)$$

の近似解を求めることを考える。2 元? 次非線型連立方程式である。? 次とは、いささかいい加減に書いているが、勘弁してもらいたい。無限次といってよいような気がするが自信が無いので? マークを付けておく。

さて、この方程式の解であるが、それをグラフに示す。2元であればグラフに書くことができるのである。以下の議論は、任意の元の方程式でも成り立つことは理解して欲しい。これらの方程式をグラフに書くと図 11 のようになる。図中に示すように、点 A と B に実数解があるのが分かるであろう。

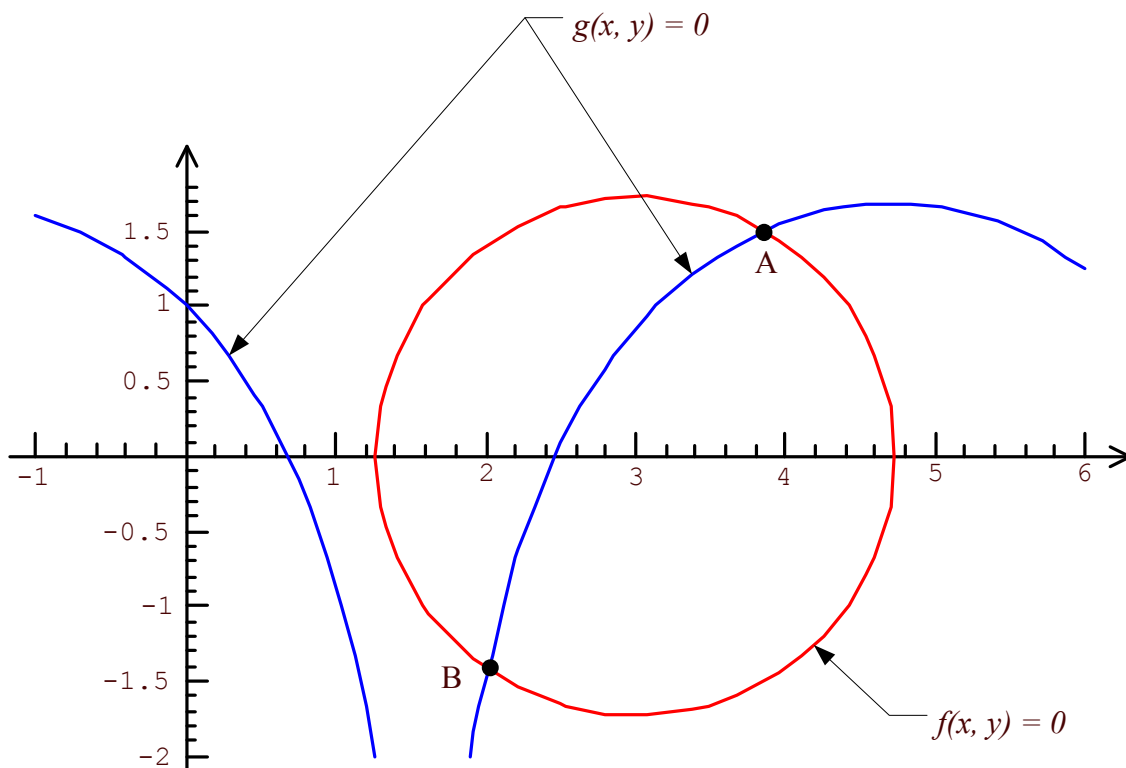


図 11: 非線型方程式のグラフと実数解

初期値から出発して、解である A や B 点に近づく方法を考える。そこで、次のような関数を考える。

$$f(x, y) = (x - 3)^2 + y^2 - 3 \quad (23)$$

$$g(x, y) = \sin x + e^{y-1} - 1 \quad (24)$$

もちろん、 $f(x, y) = 0$ と $g(x, y) = 0$ が同時に成り立つ、 (x, y) を求めたいわけである。

いつものように、この非線型連立方程式の解を (α_x, α_y) とする。当然、 $f(\alpha_x, \alpha_y) = 0$ かつ $g(\alpha_x, \alpha_y) = 0$ である。そして、 i 番目の近似解を (x_i, y_i) とする。ここから、 $(\Delta x, \Delta y)$ だけ移動したところの値は、

$$f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) = f(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + O(\Delta^2)$$

ただし、 $(\Delta x, \Delta y)$ が小さい場合

$$\simeq f(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \quad (25)$$

となる。 $g(x, y)$ の場合も全く同じである。それら、2つをまとめ、 \simeq を $=$ に直すと

$$f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) = f(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \quad (26)$$

$$g(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) = g(x_i, y_i) + \frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Delta y \quad (27)$$

となる。

ここで、 $f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) = 0$ かつ $g(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) = 0$ となるように、 Δx と Δy を選ぶとする。このようにするためには、 Δx と Δy はつぎの連立方程式を満たせばよい。式 (26) と (27) の左辺をゼロとおき式を整理すれば

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_i, y_i) \\ -g(x_i, y_i) \end{pmatrix} \quad (28)$$

となる。この連立方程式を解いて、 $(\Delta x, \Delta y)$ を求める。 $\alpha_x \simeq x_i + \Delta x$ したがって、 $\alpha_y \simeq y_i + \Delta y$ から、次の近似解は

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta x \\ y_{i+1} = y_i + \Delta y \end{cases} \quad (29)$$

となる。これが、非線型連立方程式の漸化式である。

8.2.3 連立で無い場合とのアナロジー

以前の授業で示した方程式の実数解や複素数解を求めたのと同じようなことを、ここでも行った。式も似ているし、考え方も同じである。以前は、

- 解に近いところでは、直線で近似できる⁶。

のような性質を利用した。2元非線型連立方程式でも同じで、

- 解に近いところでは、平面で近似できる⁷。

という性質を利用している。この性質を定量的に表したものがテイラー展開である。なるほどテイラー展開は便利なものである。

8.3 非線型連立方程式の解 (多元の場合)

前章では、2元非線型連立方程式のニュートン法での計算方法を示した。ここでは、それを一般化する。ここで示す方法は、複素数解にも適用できる。

⁶ 解に近い必要はなく、狭い範囲は直線で近似できるということである。

⁷ これも先ほどと同じで、解に近い必要はなく、狭い範囲は直線で近似できるということである。

N 元 の非線型連立方程式は、

$$\begin{cases} f_1(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N) = 0 \\ f_2(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N) = 0 \\ f_3(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N) = 0 \\ \vdots \\ f_N(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

と書くことができる。未知数は、

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, \cdots + x_N) \quad (31)$$

とベクトルで表現する。すると、 i 番目の方程式は、 $f_i(\mathbf{X})$ と書き表されるので、表現が簡単になる。これを、先ほどと同じようにテイラー展開すると

$$f_i(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) = f_i(\mathbf{X}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial f_i}{\partial x_3} \Delta x_3 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_N} \Delta x_N + O(\Delta\mathbf{X}^2) \quad (32)$$

となる。 $i = 1, 2, 3, \cdots, N$ の全てににおいて、 $f_i(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) = 0$ になるように、 $\Delta\mathbf{X} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \cdots, \Delta x_N)$ を選ぶ。そのように選ぶためには、2 次以降の高次の項を無視すると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \frac{\partial f_N}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \vdots \\ \Delta x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(\mathbf{X}) \\ -f_2(\mathbf{X}) \\ -f_3(\mathbf{X}) \\ \cdots \\ -f_N(\mathbf{X}) \end{pmatrix} \quad (33)$$

の線形である N 元 1 次連立方程式が成り立つ。これを解いて、 $\Delta\mathbf{X} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \cdots, \Delta x_N)$ を求める。そうすると、より真の解に近い \mathbf{X}^{new} は、 $\mathbf{X}^{new} = \mathbf{X}^{old} + \Delta\mathbf{X}$ と計算できる。しつこいようであるが、成分で書き表すと

$$\begin{cases} x_1^{new} = x_1^{old} + \Delta x_1 \\ x_2^{new} = x_2^{old} + \Delta x_2 \\ x_3^{new} = x_3^{old} + \Delta x_3 \\ \vdots \\ x_N^{new} = x_N^{old} + \Delta x_N \end{cases} \quad (34)$$

となる

非線型の連立方程式を線形の連立方程式で計算しているわけである。解きやすい式になった分、反復計算が必要となっている。

9 練習問題

[問 1] 二分法とニュートン法を用いて、以下の非線形方程式の実数の近似解を求めるプログラムを作成せよ。

$$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$$

$$x + e^x + \sin x = 0$$

[問 2] ニュートン法を用いて、次の非線形方程式の複素数の近似解を求めるプログラムを作成せよ。

$$z^3 - 3z^2 + 9z - 8 = 0$$

ちなみに、複素数の近似解は、

$$z = 0.91704720793889364143180634077 + 2.45369996069857723147134512148i$$

$$z = 0.91704720793889364143180634077 - 2.45369996069857723147134512148i$$

である。実数解は、

$$z = 1.16590558412221271713638731846$$

である。

[問 3] ニュートン法を用いて、次の非線型連立方程式の実数の近似解を求めるプログラムを作成せよ。

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 - 3 = 0 \\ \sin x + e^{y-1} - 1 = 0 \end{cases}$$

ちなみに、近似解は、

$$(x = 3.85779488720852212145788558016052, \quad y = 1.504721878447614920479751585974204)$$

$$(x = 1.997355766768889566933536708853074, \quad y = -1.412340094158768341643120106831151)$$

である。さあ、この近似解が得られるように、がんばろう。

10 レポート提出

練習問題の [問 1] の

$$x + e^x + \sin x = 0$$

の近似解を計算する二分法とニュートン法のプログラムを作成し、レポートとして提出すること。

期限 9月9日(金) PM 6:00
用紙 A4
提出場所 山本研究室の入口のポスト
表紙 表紙を1枚つけて、以下の項目を分かりやすく記述すること。
授業科目名「計算機応用」
課題名「課題 非線形方程式」
5E 学籍番号 氏名
提出日
内容 ソースプログラム(プリントアウトしたもの)