波動方程式

山本昌志*

2006 年 2 月 7 日

1 波動方程式とは

ラプラス方程式が済んだので，次に波動方程式に移ろう．その前に，2 階の偏微分方程式の種類について説明しておく．2 階の偏微分方程式は，ラプラス方程式のように楕円型，次に学習する波動方程式のような双曲型，学習はしないが拡散方程式のような放物型に分けられる．これが，2 階の偏微分方程式の代表的な型である．これらの解法を知っておけば，自然現象の多くの問題を計算することができる．いうなれば，超基本の方程式である．

波動方程式は，名前が表しているように波の方程式である．自然科学では，波を扱うことが非常に多い．光，電磁波，量子力学等の問題は全て波を取り扱っている．いろいろな場面で出くわす波の方程式は簡単で，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{1}$$

と書き表すことができる．c は波の速度である．これは，3 次元の場合で，時間を入れると 4 次元の方程式になり，ちょっと計算するには複雑である．そこで，ここでは空間 1 次元，時間 1 次元の 2 次元の方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{2}$$

を数値計算で解くことを考える．

皆さんは，フーリエ級数を学習したときに，この方程式を解いたとはずである．ここでは，数値計算により近似解を得る方法を学習する．もちろん，フーリエ級数で解いた解は，解析解で完璧である．ただ，フーリエ級数が適用できるのは，空間が 1 次元の場合である．2 次元以上になると境界条件が簡単な場合に限り，フーリエ級数を用いて計算できる．境界が複雑になると，数値計算で近似解を求めることが重要になる．数値計算は，空間が 2 次元以上の問題で威力を発揮することになるが，ここでは学習のため，空間が 1 次元の問題を解くことにする．

具体的な問題を例にして，学習を進める．比較的単純な問題として，図 1 のような弦の振動を考える．これは，ギターのように両端が固定された弦である．ある時刻 t の位置 x の変位を $u(x,t)$ としている．この変位は波動方程式，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3}$$

*独立行政法人　秋田工業高等専門学校　電気工学科

を満たす．ただし，波の速度は $c=1$ とした．こうしても，波動方程式を解くと言う意味はそうは変わらないし，計算が楽になるメリットはある．

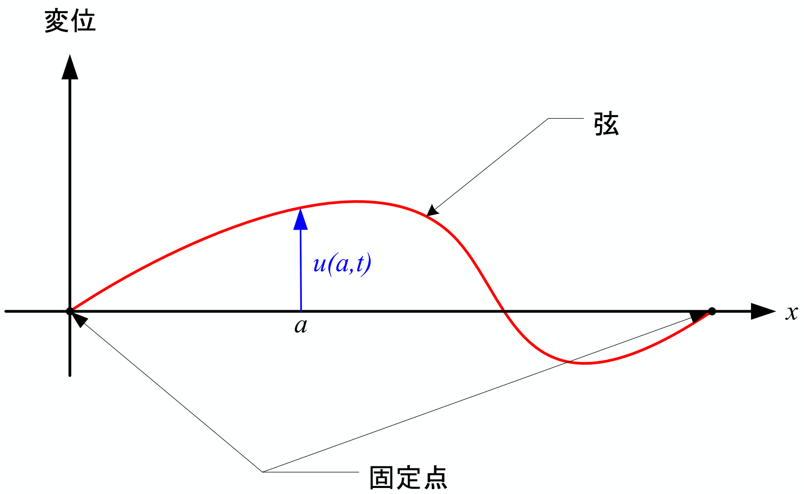

図 1: 時刻 t の弦の様子．

2　差分法による 1 次元波動方程式の数値計算

このあたりの説明は，参考文献 [1] を大いに参考にした．これは分かりやすい教科書なので，読んでみると良いだろう．

2.1　差分方程式

1 次元波動方程式を数値計で解くことを考える．その前に，解くべき方程式と条件をきちんと書いておく．解くべき方程式と条件は，

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & & (0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq t) \\
u(x,0) = \phi(x), & \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) & (0 \leqq x \leqq 1) \\
u(0,t) = u(1,t) = 0 & &
\end{cases}
\tag{4}
$$

となる．弦を伝わる波の速度は 1，弦の長さも 1 としている．この最初の式は波動方程式であるが，2 番目を初期条件，3 番目を境界条件と言う．2 番目の初期条件は，$t=0$ の時の弦の状態を示しており，$\phi(x)$ はそのときの弦の形 (変位)，$\phi(x)$ は弦の変位の速度である．

波動方程式の他に，初期条件と境界条件がある．力学的状態は，ある時刻，ここでは $t=0$ の時の変位とその変位の速度が決まれば，それ以降を決めることができる．振動の場合は，これに加えて更に，振動の境界条件を決める必要がある．これらが決まって初めて，波動方程式とともに，振動の状態，ある時刻と位置の変位の値が決まるわけである．図 4 に初期条件と境界条件の様子を示す．

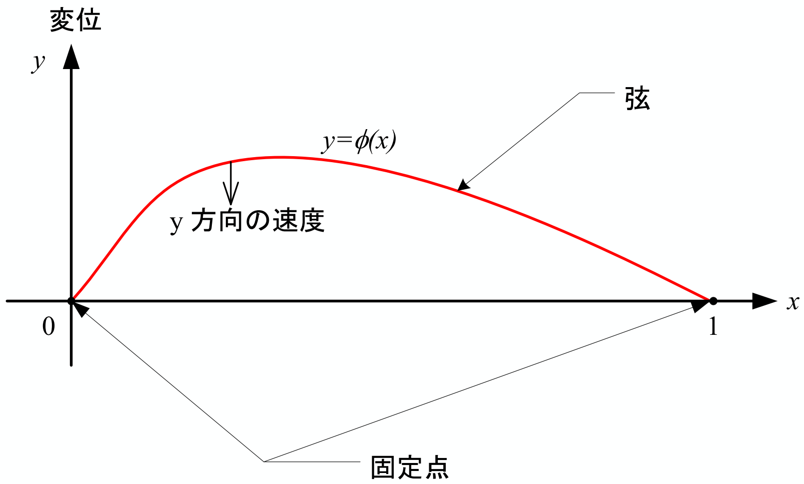

図 2: 時刻 $t=0$ のときの弦の様子 (スナップショット)．初期条件と境界条件が表されており，y 方向の速度が $\psi(x)$ になっている．

まずは，波動方程式を差分方程式に書き直すことからはじめる．これも，いつものように，解 $u(x,t)$ をテイラー展開する．x 方向の微小変位を δx，時間軸方向の微小変位を δt とする．すると，

$$\begin{aligned} u(x+\Delta x,t) &= u(x,t)+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta x)^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^3+\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^4+\cdots \\ u(x-\Delta x,t) &= u(x,t)-\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta x)^2-\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^3+\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^4-\cdots \end{aligned} \tag{5}$$

となる．これらの式の辺々を足し合わせえると，

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x,t}=\frac{1}{\Delta x^2}\left[u(x+\Delta x,t)-2u(x,t)+u(x-\Delta x,t)\right]-O(\Delta x^2) \tag{6}$$

が得られる．このことから，2 階の偏導関数の値は微小変位 Δx の場所の関数の値を用いて，$(\Delta x)^2$ の精度で近似計算ができることが分かる．すなわち，式 (6) の右辺の第 1 項を計算すればよいのである．ラプラス方程式と同じである．同様なことを時間軸方向についても行うと

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x,t}=\frac{1}{\Delta t^2}\left[u(x,t+\Delta t)-2u(x,t)+u(x,t-\Delta t)\right]-O(\Delta t^2) \tag{7}$$

が得られる．

これらの式 (6) と (7) を元の波動方程式 (4) に代入すれば，

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left[u(x+\Delta x,t)-2u(x,t)+u(x-\Delta x,t)\right]=\frac{1}{\Delta t^2}\left[u(x,t+\Delta t)-2u(x,t)+u(x,t-\Delta t)\right] \tag{8}$$

となる．これが，1 次元波動方程式の差分の式である．この式を計算し易いように，もう少し変形すると，

$$u(x,t+\Delta t)=2u(x,t)-u(x,t-\Delta t)+\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left[u(x+\Delta x,t)-2u(x,t)+u(x-\Delta x,t)\right] \tag{9}$$

とすることができる．この式の右辺は，時刻 t と $t-\Delta t$ の値でである．そして，左辺は時刻 $t+\Delta t$ の値である．このことから，式 (9) を用いると，時刻 t と $t-\Delta t$ の値から，$t+\Delta t$ の値が計算できることになる．

実際に式 (9) を数値計算する場合，x 方向には Δx，時間軸方向には Δt 毎に分割する．ラプラス方程式を格子点で分割したのと同じである．格子点に分割し数値計算する場合，$u(x,t)$ や $u(x+\Delta x,y)$ と表現するよりは，$u_{i\,j}$ と表現したほうが便利である．そこで，

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(i\Delta x, j\Delta t) \\ &= u_{i\,j} \end{aligned} \tag{10}$$

と表現を改める．このようにすると，式 (9) は

$$u_{i\,j+1}=2u_{i\,j}-u_{i\,j-1}+\alpha\left(u_{i+1\,j}-2u_{i\,j}+u_{i-1\,j}\right) \tag{11}$$

となり，数値計算し易い形になる．ただし，

$$\alpha=\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \tag{12}$$

である．

この式を用いた計算の様子を図 3 に示す．

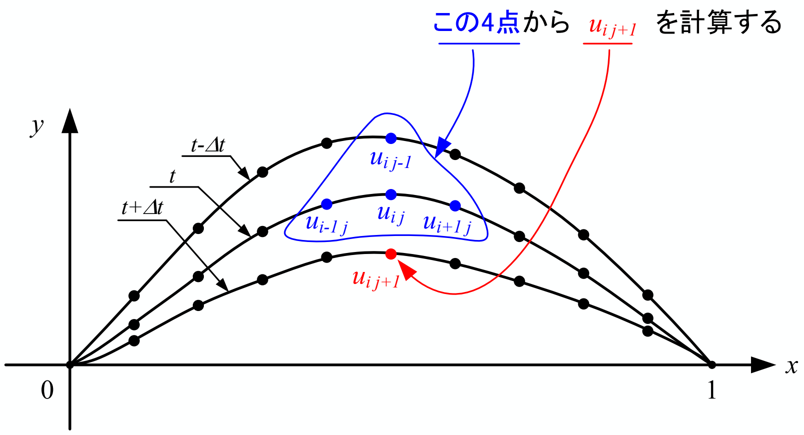

図 3: 差分方程式の計算の様子

波動方程式というけったいな偏微分方程式が，ただ単に数値を順番に代入していく式に変換されたわけである．この計算は非常に簡単である．ただ，時間領域を 1000 分割 ($N_t = 1000$)，x 軸領域も 1000 分割 ($N_x = 1000$) すると，100 万回の計算が必要であるが，コンピューターにとって，その程度の計算は大したことはない．

2.2 初期条件

式 (11) を計算すると，$t = 0$ の状態から，時間の経過によって弦の様子がどうなるか分かる．以下のように，芋づる式に，弦の変位が計算できるわけである．

$$
\begin{array}{ccccccc}
u_{1\,0} & u_{2\,0} & u_{3\,0} & u_{4\,0} & u_{5\,0} & \cdots & u_{N_x-1\,0} \\
 & & & \Downarrow & & & \\
u_{1\,1} & u_{2\,1} & u_{3\,1} & u_{4\,1} & u_{5\,1} & \cdots & u_{N_x-1\,1} \\
 & & & \Downarrow & & & \\
u_{1\,2} & u_{2\,2} & u_{3\,2} & u_{4\,2} & u_{5\,2} & \cdots & u_{N_x-1\,2} \\
 & & & \Downarrow & & & \\
u_{1\,3} & u_{2\,3} & u_{3\,3} & u_{4\,3} & u_{5\,3} & \cdots & u_{N_x-1\,3} \\
 & & & \vdots & & & \\
u_{1\,N_t} & u_{2\,N_t} & u_{3\,N_t} & u_{4\,N_t} & u_{5\,N_t} & \cdots & u_{N_x-1\,N_t}
\end{array}
$$

このように，計算を盲目的に進めれば，弦の振動の式 (4) の数値計算の結果である近似解が得られる．当然，境界条件

$$u_{0\,j} = u_{N_x\,j} = 0 \qquad (j = 0,\, 1,\, 2,\, 3, \cdots, N_t) \tag{13}$$

を，忘れてはならない．

これを計算するためには，まず，$u_{i\,0} \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, N_x - 1)$ の値を決める必要がある．これ以前の状態が分からないので，式 (11) は使えないが，式 (4) の初期条件が使える．すなわち，

$$u_{i\,0} = \phi(i\Delta x) \tag{14}$$

である．

次に，$u_{i\,1} \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, N_x - 1)$ を計算するわけであるが，まだ，式 (11) は使えない．なぜならば，この式は 2 つ前の状態まで必要なので，これまでのところ，一つ前の状態しか分かっていないからである．そこで，2 番目の初期条件 (変位の速度) を使うことになる．計算したい量は $u(x, \Delta t)$ なので，とりあえずテーラー展開してみる．これを，$t = 0$ の周りでテーラー展開すると，

$$
\begin{aligned}
u(x, \Delta t) &= u(x, 0) + \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + O(\Delta x^3) \\
&\qquad \text{初期条件と波動方程式より} \\
&= u(x, 0) + \psi(x)\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta t)^2 + O(\Delta x^3)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

となる．この右辺の第 1 と 2 項は簡単に計算できる．問題は第 3 項であるが，これは見覚えのある式である．式 (6) と同じである．これを代入すると，

$$\begin{aligned} u(x,\Delta t) &\approx u(x,0)+\psi(x)\Delta t+\frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left[u(x+\Delta x,t)-2u(x,t)+u(x-\Delta x,t)\right] \\ &\approx u(x,0)+\psi(x)\Delta t+\frac{\alpha}{2}\left[u(x+\Delta x,t)-2u(x,t)+u(x-\Delta x,t)\right] \end{aligned} \tag{16}$$

となる．これは，めでたい式である．右辺は，$t=0$ のみの値で構成されている．これで，$u_{i\,1}\quad(i=1,2,3,\cdots,N_x-1)$ が計算可能になった．この式から，

$$u_{i\,1}=u_{i\,0}+\psi(x_i)\Delta t+\frac{\alpha}{2}\left[u_{i+1\,0}-2u_{i\,0}+u_{i-1\,0}\right] \tag{17}$$

が得られる．

以上より，$u_{i\,0}$ と $u_{i\,1}$ が得られたわけである．$u_{i\,2}$ 以降は，式 (11) に従い，計算すればよい．

2.3 進行波の取り扱い

今までの議論で定在波の取り扱いは可能であろう．そこで，進行波の記述方法について，コメントしておく．進行波を数値計算すると面白いのでその方法を示す．進行波を記述するためには，初期条件さえ記述すれば，後の差分方程式は同じである．その初期条件の記述の仕方を示す．

元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{18}$$

には，明らかに，ダランベールの解

$$u(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct) \tag{19}$$

というものがある．これは元の波動方程式に代入すれば，それを満足していることは直ちに理解できる．ここで，$f(x-ct)$ は x 軸を正の方向に進む進行波 (forward wave) で，$g(x+ct)$ は負の方向に進む後進波 (backward wave) である．

初期条件

$$u(x,0)=\phi(x) \tag{20}$$

の波が x 軸を正の方向に進む進行波として取り扱うには，どうしたらよいだろうか?．のこる条件は，

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x) \tag{21}$$

である．進行波になるように，$\psi(x)$ を決めればよい．$u(x,t)$ を進行波と仮定すると，式 (20) から

$$u(x,\Delta t)=\phi(x-c\Delta t) \tag{22}$$

となる．この式を使って，$\psi(x)$ を求めることにする．$\psi(x)$ の定義より，

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(x,\Delta t) - u(x,0)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi(x - c\Delta t) - \phi(x)}{\Delta t} \\
& \qquad c\Delta t = \Delta x \text{ とおくと} \\
&= -c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x) - \phi(x - \Delta x)}{\Delta x} \\
&= -c \frac{d\phi}{dx}
\end{aligned} \tag{23}$$

となる．進行波にするためには，$\psi(x)$ は $\phi(x)$ の導関数ににすればよいのである．

念のため言っておくが，後進波にするためには

$$\psi(x) = c\frac{d\phi}{dx} \tag{24}$$

とすればよい．

3 数値計算上の注意

ここで，実際のプログラムを作成する上で，一つだけ注意を与えておく．プログラムが安定に動作するためには，位置と時刻の微小変化の比の 2 乗は，

$$\alpha \leq 1 \tag{25}$$

である必要がある．この値は，繰り返し計算をすると，その回数だけ乗算される．即ち，n 回の繰り返し計算があれば，α^n が現れる．もし，α が 1 以上であれば，早急に発散するであろう．従って，これは 1 以下になるように，微小変化を考えなくてはならない．

4 練習問題

ラプラス方程式のプログラムを参考にして，練習問題のプログラムを作成せよ．

4.1 定在波

図 4 のようにギターの弦を留め金でとめている．$t = 0$ の瞬間に留め金をはずした場合，その振動はどうなるか?．$t = 1$ まで，振動の様子を数値計算で求め，それをアニメーションで表示せよ．予め頭で想像したものと結果は大きく食い違うはずである．非常に，興味深い結果が得られるはずである．この問題は，フーリエ級数の時間に学習した??.

ヒントを与えておく．$t=0$ のとき，止められていた弦が動き始める．従って，このときの速度はゼロであるので，初期条件

$$\psi(x)=0 \tag{26}$$

となる．

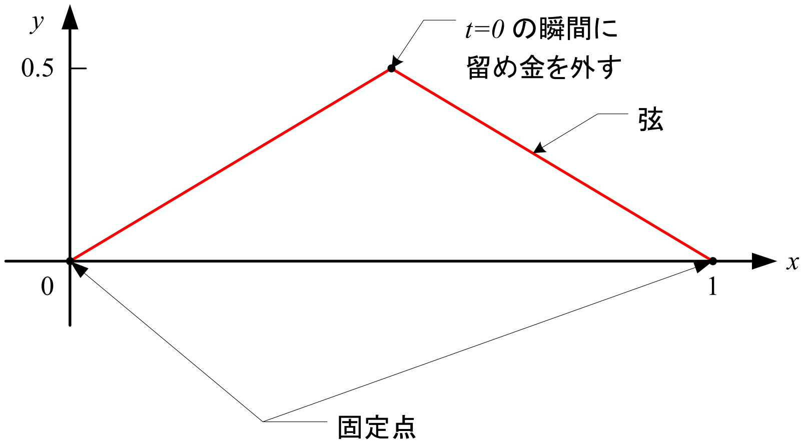

図 4: 問題の弦

4.2　進行波

前回の問題の弦の上を進む進行波と後進波について，計算してみよう．弦の長さ $L=1$，波の速度は $c=1$，両端は固定されているとする．その条件のもとで，以下 2 つの波が衝突する様子を計算せよ．

後進波は，

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= a\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}\right]\\ &\text{ただし，}\\ &a=0.5\\ &\sigma_1=0.02\\ &x_1=0.8\end{aligned} \tag{27}$$

とする．そして，進行波は，

$$\phi_2(x) = a(x - x_0)\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$\begin{aligned} &\text{ただし，} \\ &a = 20 \\ &\sigma_1 = 0.02 \\ &x_0 = 0.4 \end{aligned} \tag{28}$$

とする．$t = 0$ のときの様子を，図 5 に示す．波の衝突で，その形はどうなるか?．壁に衝突するとどうなるか?計算せよ．

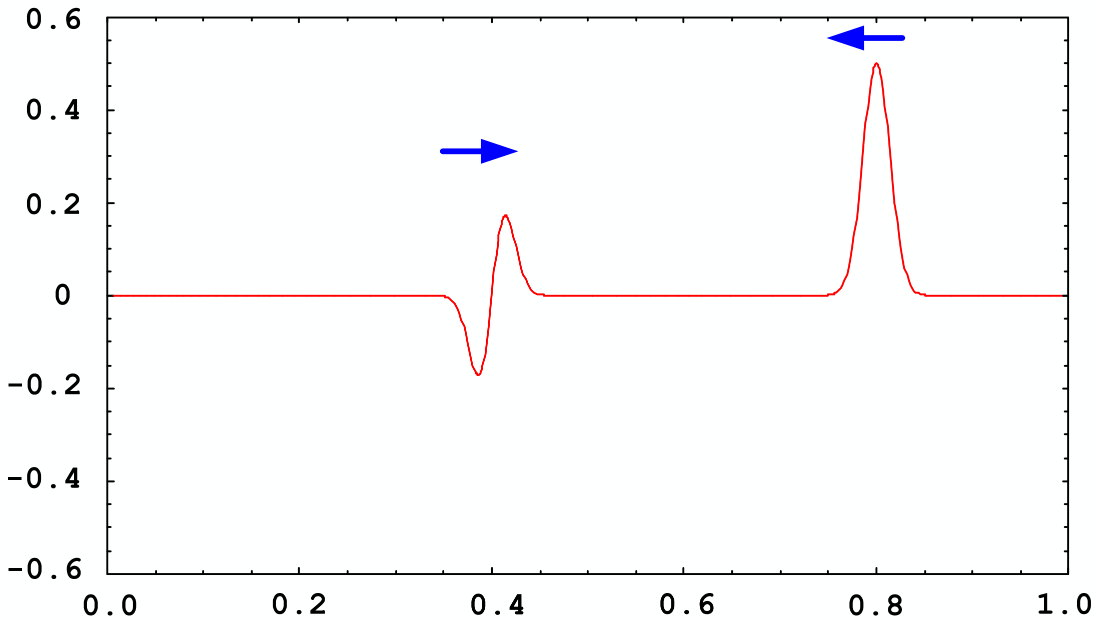

図 5: $t = 0$ の時の進行波と後進波の様子．

参考文献

[1] 高橋大輔. 数値計算. 岩波書店, 1996.