後期中間試験模範解答 (5E 計算機応用)

電気工学科　　学籍番号　　　　氏名

1　常微分方程式の数値計算法

1.1　基礎

[問 1] *10 点*

計算のステップ (刻み幅) を h とすると，4 次のルンゲ・クッタの漸化式は以下のようになる．

$$
\begin{cases}
\quad k_1 = hf(x_n, y_n) \\
\quad k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\
\quad k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\
\quad k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \\
x_{n+1} = x_n + h \\
y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{cases}
$$

[問 2] *10 点*

k_1〜k_4 は以下を表している．

(1) k_1 は図中の ① の点の傾きに，計算ステップ h を乗じた値である．従って，k_1 は計算が完了している点 (x_i, y_i) の傾きを使った Δy の近似となっている．

(2) k_2 は図中の ② の点の傾きに，ステップ幅 h を乗じた値である．② の点は，k_1 を使った求めた計算ステップの中点である．したがって，k_2 は k_1 から計算した中点の傾きを使った Δy の近似となっている．

(3) k_3 は図中の ③ の点の傾きに，ステップ幅 h を乗じた値である．③ の点は，k_2 を使った求めた計算ステップの中点である．したがって，k_3 は k_2 から計算した中点の傾きを使った Δy の近似となっている．

(4) k_4 は図中の ④ の点の傾きに，ステップ幅 h を乗じた値である．④ の点は，k_3 を使った求めた計算ステップの終点である．したがって，k_4 は k_3 から計算した終点の傾きを使った Δy の近似となっている．

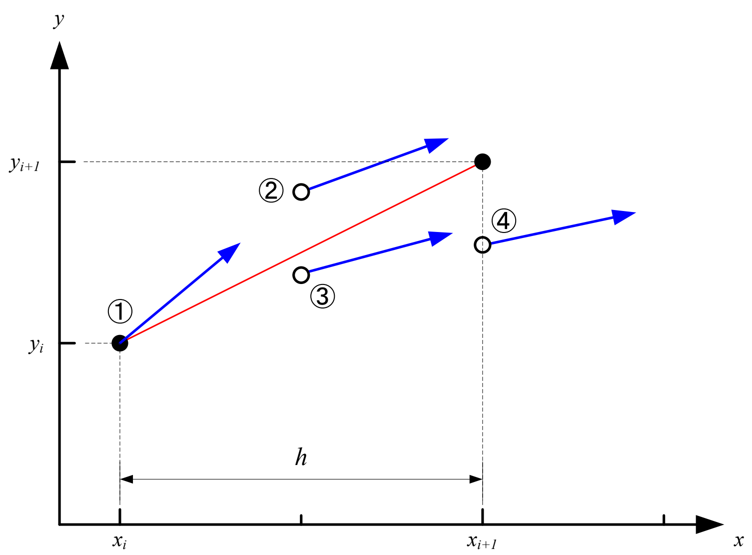

図 1: 4 次のルンゲ・クッタ法

［**問 3**］ $\boxed{\textit{10 点}}$

これを連立微分方程式に直すために、$y_0 = y, y_1 = y'$ とと変数変換する。すると、問題の 2 階の微分方程式は、

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x} = y_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + y_1 + y_0 = e^x \end{cases}$$

となる。これを、数値計算しやすいように直すと

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{1}{x}(e^x - y_0 - y_1) \end{cases}$$

となる。これで、2 階の常微分方程式が、2 元の連立常微分方程式に直せた。

1.2 プログラム

［**問 1**］ $\boxed{\textit{10 点}}$

```
for(i=0; i < ncal; i++){
   k1=h*func(x[i],y[i]);
   k2=h*func(x[i]+h/2.0, y[i]+k1/2.0);
   k3=h*func(x[i]+h/2.0, y[i]+k2/2.0);
   k4=h*func(x[i]+h, y[i]+k3);

   x[i+1]=x[i]+h;
   y[i+1]=y[i]+1.0/6.0*(k1+2.0*k2+2.0*k3+k4);
}
```

［**問 2**］ $\boxed{\textit{10 点}}$

$x = 2.0$ のとき $y = 3.5$ という初期条件の元，微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin x \cos x - yx^2$$

を計算している．

2 連立一次方程式の数値計算法

2.1 ガウス・ジョルダン法

［**問 1**］ $\boxed{\textit{10 点}}$

以下の式で示す左の連立方程式の解を変えないように右の連立方程式に変形する方法である．

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_N \end{bmatrix}$$

実際の手順は，

1. 処理する行の対角成分 a_{ij} を 1 にする．
2. 対角成分を 1 にした以外の行の j 列をゼロにする．

を 1 行から繰り返す．もちろん，解の形が変わらないように，非同次項も係数行列と同じ処理を施す．

［問 2］ $\boxed{\mathit{20}\text{ 点}}$

連立方程式

$$\begin{bmatrix}2&2&2\\3&4&1\\1&2&1\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}y_{11}&y_{12}&y_{13}\\y_{21}&y_{22}&y_{23}\\y_{31}&y_{32}&y_{33}\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$

から，解のベクトル (x_1,x_2,x_3) と逆行列

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2&2&2\\3&4&1\\1&2&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}y_{11}&y_{12}&y_{13}\\y_{21}&y_{22}&y_{23}\\y_{31}&y_{32}&y_{33}\end{pmatrix}$$

を求めることになる．

$$\begin{bmatrix}2&2&2\\3&4&1\\1&2&1\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\boldsymbol{A}^{-1}\right]=\left[\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$

1 行 ← (1/2)×1 行

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\3&4&1\\1&2&1\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\boldsymbol{A}^{-1}\right]=\left[\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$

2 行 ←2 行 −3×1 行

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\1&2&1\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\boldsymbol{A}^{-1}\right]=\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}1/2&0&0\\-3/2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$

3 行 ←3 行 −1 行

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&1&0\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\boldsymbol{A}^{-1}\right]=\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}1/2&0&0\\-3/2&1&0\\-1/2&0&1\end{pmatrix}\right]$$

1 行 ←1 行 −2 行

$$\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&1&0\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\boldsymbol{A}^{-1}\right]=\left[\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}2&-1&0\\-3/2&1&0\\-1/2&0&1\end{pmatrix}\right]$$

3 行 ←3 行 −2 行

$$\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&2\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\boldsymbol{A}^{-1}\right]=\left[\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}2&-1&0\\-3/2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\right]$$

3 行 ← 1/2×3 行

$$\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\boldsymbol{A}^{-1}\right]=\left[\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}2&-1&0\\-3/2&1&0\\1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}\right]$$

1 行 ←1 行 −3×3 行

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\boldsymbol{A}^{-1}\right]=\left[\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}1/2&1/2&-3/2\\-3/2&1&0\\1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}\right]$$

2 行 ←1 行 −(−2)×3 行

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\boldsymbol{A}^{-1}\right]=\left[\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}1/2&1/2&-3/2\\-1/2&0&1\\1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}\right]$$

これで，逆行列

$$\begin{bmatrix}2&2&2\\3&4&1\\1&2&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1/2&1/2&-3/2\\-1/2&0&1\\1/2&-1/2&1/2\end{bmatrix}$$

と解が

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

と求まった．

2.2 プログラム

[**問 1**] *20 点*

```
int ipv, i, j;
double inv_pivot, temp;

for(ipv=1 ; ipv <= n ; ipv++){

   /* ---- 対角成分=1(ピボット行の処理) ---- */
   inv_pivot = 1.0/a[ipv][ipv];
   for(j=1 ; j <= n ; j++){
      a[ipv][j] *= inv_pivot;
   }
   b[ipv] *= inv_pivot;

   /* ---- ピボット列=0(ピボット行以外の処理) ---- */
   for(i=1 ; i<=n ; i++){
      if(i != ipv){
         temp = a[i][ipv];
         for(j=1 ; j<=n ; j++){
            a[i][j] -= temp*a[ipv][j];
         }
         b[i] -= temp*b[ipv];
      }
   }

}
```