後期中間試験問題 (5E 計算機応用)

山本昌志*

2005 年 12 月 08 日

1 常微分方程式の数値計算法

1.1 基礎

常微分方程式の近似解を数値計算により求める方法についての問いである．

[問 1] 4 次のルンゲ・クッタ法の漸化式を書け

[問 2] 前問の 4 次のルンゲ・クッタ法では，微小変位 h に対して，Δy は 4 つの値 (k_1, k_2, k_3, k_4) の加重平均となっている．k_1〜k_4 は，何を表しているか図を使って説明せよ．分かりやすく記述すること．

[問 3] 数値計算を行う場合，高階の微分方程式は 1 階の連立微分方程式に直す．次の，微分方程式を 1 階の連立微分方程式に直せ．ただし，左辺は数値計算を容易にするため，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ のように導関数を書くこと．

$$xy'' + y' + y = e^x \tag{1}$$

1.2 プログラム

4 次のルンゲ・クッタ法で常微分方程式の近似解を計算するプログラムをリスト 1 示す．

[問 1] プログラム中の $\boxed{\quad ア \quad}$ に入れる適当な文を書け．

[問 2] このプログラムは，どのような微分方程式を計算しているか?．初期条件と微分方程式を示せ．

ただし，プログラムの条件は次の通りとする．

- 計算結果の x_i の値は配列 `x[i]` に格納される．そのときの y の値，即ち，y_i の値は，配列 `y[i]` に格納される．
- 計算に必要な値は，プログラムの前半で，

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

– 計算を止める x の最終の値は，変数 `final_x` に格納される．
– 計算回数は，変数 `ncal` に格納される．

と与えられる．

- $\boxed{\quad ア \quad}$ は，4 次のルンゲ・クッタの計算を行い，近似解を配列 `x[]` と `y[]` に格納している．

リスト 1: 常微分方程式を解くプログラム

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define IMAX 100001
double func(double x, double y);

/*=============================================================*/
/*          main function                                       */
/*=============================================================*/
int main(void){
  double x[IMAX], y[IMAX];
  double final_x, h;
  double k1, k2, k3, k4;
  int ncal, i;


  /*--- set initial condition and cal range ---*/

  x[0]=2.0;
  y[0]=3.5;

  final_x=10.0;
  ncal=10000;

  /* --- size of calculation step --- */

  h=(final_x-x[0])/ncal;


  /* --- 4th Runge Kutta Calculation --- */

                          ア

  return 0;
}


/*=============================================================*/
/*          define function                                     */
/*=============================================================*/
double func(double x, double y){
  double dydx;

  dydx=sin(x)*cos(x)-y*x*x;

  return(dydx);
}
```

2　連立一次方程式の数値計算法

2.1　ガウス・ジョルダン法

連立一次方程式について，以下の問いに答えよ．

[問 1]　ガウス・ジョルダン法とはどのような方法か?．簡潔に述べよ．

[問 2]　連立一次方程式の解と，係数行列の逆行列をガウス・ジョルダン法で求めよ．

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

ヒント

係数行列の逆行列は

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -3/2 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

である．

2.2　プログラム

ガウス・ジョルダン法で連立一次方程式の解を計算する関数に関する問いである．

[問 1]　プログラム中の$\boxed{}$の部分の文を書け．
ただし，条件は以下の通りとする．

- 対角成分には，決して 0 が現れないものとする．即ち，ピボット選択は不要である．
- 行列式が 0 となる係数行列は，与えられないものとする．即ち，行列が特異な場合の処理は不要である．
- 仮引数 `n` は，解くべき連立方程式の未知数の数である．
- 仮引数の配列 `a` と `b` は，係数行列 $\boldsymbol{A}$ と非同次項 $\boldsymbol{b}$ である．
  - 係数行列は，配列 `a[1][1]`〜`a[n][n]` に格納されている．
  - 非同次項は，配列 `b[1]`〜`b[n]` に格納されている．
- プログラム実行後，連立方程式の解 $\boldsymbol{x}$ は，配列 `b[1]`〜`b[n]` に格納される．
- このプログラムでの処理が終了すると，配列 `a[1][1]`〜`a[n][n]` は単位行列になる．

リスト 2: ガウス・ジョルダン法の関数

```
/* ========== ガウスジョルダン法の関数 ====================*/
void gauss_jordan(int n, double a[][100], double b[]){

}
```