学年末試験問題 (5E 計算機応用)

電気工学科　　学籍番号　　　　　氏名

1　連立 1 次方程式 (反復法)

[問 1] $\boxed{25\text{点}}$

反復法とは，連立方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

の解 $\boldsymbol{x}$ を，求める方法の一つである．真の解を $\boldsymbol{x}$，ある計算により n 回目で求められた近似解を $\boldsymbol{x}_n$ とする．そして，計算回数を増やして，

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$$

近似解が真の解に近づける方法を反復法という．
ガウス・ザイデル法はヤコビ法を改良した方法で，x_i の $k+1$ 回目の反復の計算より求められられる近似解 $x_i^{(k+1)}$ を

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} = a_{ii}^{-1} \Big\{ b_i - (&a_{i1}x_1^{(k+1)} + a_{i2}x_2^{(k+1)} + a_{i3}x_3^{(k+1)} + \cdots + a_{ii-1}x_{i-1}^{(k+1)} + \\ &a_{ii+1}x_{i+1}^{(k)} + a_{ii+2}x_{i+2}^{(k)} + a_{ii+3}x_{i+3}^{(k)} + \cdots + a_{in}x_n^{(k)}) \Big\} \end{aligned}$$

として求める方法である．実際の計算では，$x_1, x_1, x_1, \cdots, x_n$ と順に $k+1$ 番目の近似解を反復により求める．従って，1 回の反復で，次のように上から下に計算を進める．

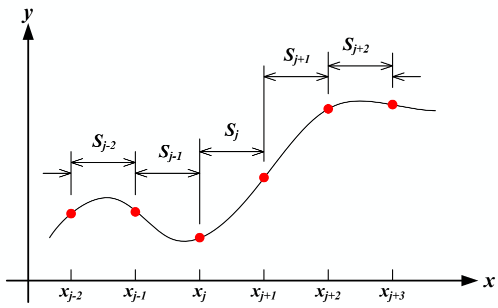
$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= a_{11}^{-1}\left\{ b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} \right) \right\} \\ x_2^{(k+1)} &= a_{22}^{-1}\left\{ b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} \right) \right\} \\ x_3^{(k+1)} &= a_{33}^{-1}\left\{ b_3 - \left(a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \cdots + a_{3n}x_n^{(k)} \right) \right\} \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= a_{nn}^{-1}\left\{ b_n - \left(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + a_{n3}x_3^{(k+1)} + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} \right) \right\} \end{aligned}$$

これを繰り返して連立方程式の解を求める方法が，ガウス・ザイデル法である．

2　補間法

［問 1］ $\boxed{10\text{点}}$

補間する領域をデータ間隔 $[x_i, x_{i+1}]$ で区切り，その間を低次の多項式で近似する方法がスプライン補間である．右図のように小さい丸がデータ点で，曲線 S_j が区分多項式である．この区分多項式の係数は，データ点を通る，導関数を連続にする等の条件を課して決める．



［問 2］ $\boxed{10\text{点}}$

3 次のスプライン補間には，区分多項式として 3 次関数

$$S_j(x) = a_j(x - x_j)^3 + b_j(x - x_j)^2 + c_j(x - x_j) + d_j \qquad (j = 0, 1, 2, 3, \cdots, N - 1)$$

を使う．この多項式の係数 a_j, b_j, c_j, d_j は，以下の条件を満たすように決める．

– 全てのデータ点を通る．
– 各々の区分補間式は，境界点の 1 次導関数は連続とする．
– 各々の区分補間式は，境界点の 2 次導関数は連続とする．

［問 3］ $\boxed{5\text{点}}$

データが $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_N, y_N)$ と $N + 1$ 個あったとする．この場合，区分多項式の数は N 個で，その未知数である係数の数は $4N$ 個となる．全てのデータ点を通という条件から，$2N$ 個の連立方程式ができる．1 次導関数が連続の条件から，$N - 1$ 個の連立方程式ができる．2 次導関数が連続から，$N - 1$ 個の連立方程式ができる．従って，先の問いで示した係数の条件により，$4N - 2$ 個の連立方程式ができる．

未知数が $4N$ 個で連立方程式が $4N - 2$ なので，2 個条件が不足している．これは適当に決めれば良く，多くの場合，両端 x_0 と x_N での 2 次導関数の値を 0 とする．あるいは，両端の 1 次導関数の値を指定してもよい．

3　積分法

[問 1] 15 点

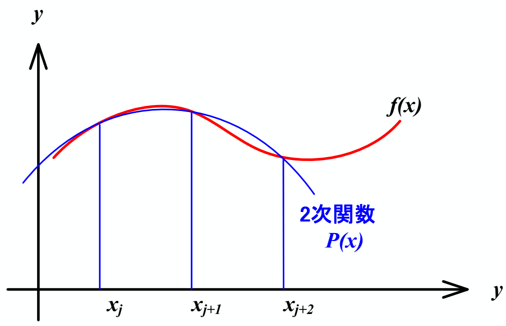
シンプソンの公式は，定積分，$S=\int_a^b f(x)dx$ の近似値を数値計算で求めるものである．

$f(x)$ の関数が複雑な場合，解析解を得ることが難しいし，不可能な場合が多い．そこで，$f(x)$ を区分多項式で近似することが考えられた．積分可能な区分多項式で区切られた領域毎に積分を行い，各々の積分値を足し合わせることにより領域全体の近似値を得ることができる．シンプソンの公式では区分多項式に 2 次関数で近似を行う．曲線上の 3 点をつかい，ラグランジュ補間により，区分多項式につかう 2 次関数を導く．

曲線上の 3 つの点をそれぞれ，$(x_j,\,x_{j+1},\,x_{j+2})$ とする．そして，曲線を近似する 2 次関数を $P(x)$ とする．$P(x)$ は

$$\begin{aligned}P(x)=&\frac{(x-x_{j+1})(x-x_{j+2})}{(x_j-x_{j+1})(x_j-x_{j+2})}f(x_j)\\&+\frac{(x-x_j)(x-x_{j+2})}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+1}-x_{j+2})}f(x_{j+1})\\&+\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})}f(x_{j+2})\end{aligned}$$

となる．この様子を右図に示す．



[問 2] 10 点

$P(x)$ を区間毎に積分を行い，全て足し合わせれば定積分の値が得られる．区間 $[x_j,\,x_{j+2}]$ で $P(x)$ を積分する．その右辺の第 1 項であるが，それは以下のようになる．

$$\begin{aligned}\text{右辺第 1 項の積分}&=\int_{x_j}^{x_{j+2}}\frac{(x-x_{j+1})(x-x_{j+2})}{(x_j-x_{j+1})(x_j-x_{j+2})}f(x_j)dx\\&=\int_0^{2h}\frac{(x_j+\xi-x_{j+1})(x_j+\xi-x_{j+2})}{(x_j-x_{j+1})(x_j-x_{j+2})}f(x_j)d\xi\\&=\int_0^{2h}\frac{(\xi-h)(\xi-2h)}{(-h)(-2h)}f(x_j)d\xi\\&=\frac{f(x_j)}{2h^2}\int_0^{2h}\left(\xi^2-3h\xi+2h^2\right)d\xi\\&=\frac{f(x_j)}{2h^2}\left[\frac{\xi^3}{3}-3h\frac{\xi^2}{2}+2h^2\xi\right]_0^{2h}\\&=\frac{h}{3}f(x_j)\end{aligned}$$

同様に，第 2,3 項の計算はほとんど同じで，

$$\text{右辺第 2 項の積分}=\frac{4h}{3}f(x_{j+1})\qquad\qquad\text{右辺第 3 項の積分}=\frac{h}{3}f(x_{j+2})$$

となる．以上より，近似した 2 次関数 $P(x)$ の範囲 $[x_j,\,x_{j+2}]$ の積分は，

$$\int_{x_j}^{x_{j+2}}P(x)dx=\frac{h}{3}\left\{f(x_j)+4f(x_{j+1})+f(x_{j+2})\right\}$$

となる．

これは，ある区間 $[x_j,\,x_{j+2}]$ の積分で，その巾は $2h$ である．区間 $[a,\,b]$ にわたっての積分 S は，これを足し合わせればよい．ただし，$j=0,2,4,6$ と足し合わせる．

$$\begin{aligned}S=&\frac{h}{3}\left\{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right\}+\frac{h}{3}\left\{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right\}+\frac{h}{3}\left\{f(x_4)+4f(x_5)+f(x_6)\right\}+\cdots\\&\cdots+\frac{h}{3}\left\{f(x_{N-2})+4f(x_{N-1})+f(x_N)\right\}\\=&\frac{h}{3}\left\{f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+4f(x_5)+2f(x_6)+\cdots\right.\\&\left.\cdots+2f(x_{N-2})+4f(x_{N-1})+f(x_N)\right\}\end{aligned}$$

これが，シンプソンの公式である．

4 偏微分方程式

[問 1] $\boxed{25\text{点}}$

2 次元のラプラス方程式は，

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

である．この偏微分方程式を表す差分の式を求める．

まずは，解 $\phi(x, y)$ をテイラー展開する．x 方向に微小変位 $\pm h$ があった場合，

$$\phi(x+h, y) = \phi(x, y) + \frac{\partial \phi}{\partial x}h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}h^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}h^4 + \cdots$$
$$\phi(x-h, y) = \phi(x, y) - \frac{\partial \phi}{\partial x}h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}h^2 - \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}h^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}h^4 - \cdots$$

となる．これらの式の辺々を足し合わせえると，

$$\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right|_{x,y} = \frac{1}{h^2}\left[\phi(x+h, y) - 2\phi(x, y) + \phi(x-h, y)\right] - O(h^2)$$

が得られる．このことから，2 階の偏導関数の値は微小変位 h の場所の関数の値を用いて，h^2 の精度で近似計算ができることが分かる．同じことを y 方向についても行うと

$$\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right|_{x,y} = \frac{1}{h^2}\left[\phi(x, y+h) - 2\phi(x, y) + \phi(x, y-h)\right] - O(h^2)$$

が得られる．

これらのテイラー展開より求められた式を元の 2 次元ラプラス方程式に代入すれば，

$$\phi(x+h, y) + \phi(x-h, y) + \phi(x, y+h) + \phi(x, y-h) - 4\phi(x, y) = 0$$

となる．これが，2 次元ラプラス方程式の差分の式である．